Algunas técnicas de resolución de ecuaciones funcionales en problemas de Olimpiada (I): Funciones reales de variable real

En esta lección de preparación olímpica se pretende presentar e ilustrar con ejemplos algunas de las técnicas básicas de resolución de ecuaciones funcionales, o de técnicas para utilizar en problemas de Olimpiada en los que una ecuación funcional juega un papel clave. En esta primera entrega, consideramos el caso de funciones real de variable real. Las funciones enteras de variable entera serán objeto de una segunda entrega.

1.- Evaluación de la ecuación en valores "simplificadores"

En multitud de casos, la ecuación funcional se simplifica mucho al evaluar una o más de las variables involucradas en ciertos valores, tales como 0 o 1, o igualando entre sí alguna de las variables en función de las cuales se expresa la ecuación funcional. Este es un método "básico", y la mayor parte de las veces se utiliza en conjunción con otros. Sin embargo, es importante no subestimar su potencia, ya que puede tener un gran impacto a la hora de simplificar una ecuación compleja, a la vez que, conociendo el comportamiento de la función a hallar en ciertos casos concretos, podemos obtener ideas que desemboquen en hipótesis sobre la forma o las propiedades de la función, que después pasaremos a demostrar formalmente. Se plantea como ejemplo el problema 4 de la XLII Olimpiada Matemática Española (2006):

Hallar todas las funciones f:(0,∞)→ℝ que satisfacen la ecuación

$$f(x)f(y)+f\left(\frac{\lambda}{x}\right)f\left(\frac{\lambda}{y}\right)=2f(xy)$$

para todo par de números reales x e y positivos, siendo λ un número real positivo tal que $f(\lambda)=1$.

Sustituyendo x=1, y=λ, se obtiene

$$2f(1)=f(1)f(\lambda)+f(\lambda)f(1)=2f(\lambda)=2,$$

con lo que $f(1)=1$. Podemos entonces tomar y=1 en la ecuación dada:

$$f(x)+f\left(\frac{\lambda}{x}\right)=2f(x); \qquad f\left(\frac{\lambda}{x}\right)=f(x).$$

Utilizando esta última relación,

$$2f(x)f(y)=2f(xy),$$

y tomando finalmente sobre ésta $y=\lambda/x$,

$$1=f(\lambda)=f(x)f\left(\frac{\lambda}{x}\right)=\left(f(x)\right)^2.$$

Esto nos deja con que $f(x)=1$ o $f(x)=-1$. Pero para todo $t>0$, existe un $z>0$ real tal que $t=z^2$. Entonces, tomando $x=y=z$, se tiene que

$$f(t)=f\left(z^2\right)=\left(f(z)\right)^2=(\pm 1)^2=1.$$

Luego la única solución posible es $f(x)=1$ para todo x.

Otro ejemplo similar puede verse en el problema 5 de la XLIII Olimpiada Matemática Internacional (2002):

Hallar todas las funciones *f*: ℝ→ℝ tales que, para cualesquiera *x*, *y*, *u*, *v* reales,

$$\left[f(x)+f(y)\right]\cdot\left[f(u)+f(v)\right]=f(xu-yv).$$

Con la sustitución $x=v$, $y=u$, se obtiene trivialmente que, para cualesquiera x, y reales,

$$\left[f(x)+f(y)\right]^2=f(0).$$

En particular, tomando ahora $x=y=0$,

$$\left[4f(0)-1\right]f(0)=0.$$

Se tiene pues la solución trivial $f(0)=0$, que lleva a $f(x)=0$ para todo x real tras tomar $y=x$ en la primera ecuación que hemos hallado,

$$4\left[f(x)\right]^2=f(0)=0,$$

o bien $f(0)=1/4$. En este segundo caso, tomamos primero $y=x$, y luego $y=0$, en la ecuación que hemos hallado, y obtenemos respectivamente, para cualquier x real,

$$4\left[f(x)\right]^2 = f(0) = \frac{1}{4}; \qquad\qquad f(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{16}} = \pm\frac{1}{4}.$$

$$0 = \left[f(x)\right]^2 + 2f(0)f(x) + \left[f(0)\right]^2 - f(0) = \left[f(x)\right]^2 + \frac{1}{2}f(x) - \frac{3}{16}.$$

Ahora bien, por simple sustitución, comprobamos que $-1/4$ no es una raíz de la segunda ecuación, mientras que $1/4$ sí lo es. Luego en este segundo caso, $f(x)=1/4$ para todo x real. Luego las soluciones de esta ecuación son dos, $f(x)=0$ para todo x real, y $f(x)=1/4$ para todo x real, y no hay otras soluciones.

Otras veces, la simplificación se obtiene a base de realizar un cambio de variable, como en el caso del problema 1 de la II Olimpiada Iberoamericana de Matemática (1987):

Encontrar las $f(x)$ tales que

$$\left[f(x)\right]^2 f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 64x$$

para $x\neq 0$, $x\neq 1$, $x\neq -1$.

En este caso, es fácil comprobar que la sustitución $x\to(1-x)/(1+x)$ produce

$$\frac{1-x}{1+x} \to \frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}} = \frac{\frac{2x}{1+x}}{\frac{2}{1+x}} = x,$$

donde la simplificación es posible al no ser $x=-1$. Realizando pues esta sustitución en la ecuación del enunciado, se tiene que, para todo x distinto de -1,

$$\left[f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right]^2 f(x) = 64\frac{1-x}{1+x}.$$

Elevando al cuadrado la ecuación dada, y dividiendo miembro a miembro por esta última, se tiene

$$\left[f(x)\right]^3=\frac{\left[f(x)\right]^4\left[f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right]^2}{\left[f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right]^2 f(x)}=\frac{64^2x^2}{64\frac{1-x}{1+x}}=\frac{64x^2(1+x)}{1-x}.$$

Nótese que podemos simplificar el segundo término de la cadena de igualdades ya que, según la ecuación dada en el enunciado,

$$f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=0\Rightarrow x=0.$$

Finalmente, tomando la raíz cúbica de los miembros primero y último de la ecuación que acabamos de hallar, se llega a la solución final:

$$f(x)=4\sqrt[3]{\frac{x^2(1+x)}{1-x}}.$$

Esta expresión es válida para $x\neq-1,0,1$. No podemos decir nada cuando x toma uno de estos últimos tres valores, ya que aparte de la ecuación inicial no tenemos más datos.

Nótese que, en este caso particular, lo único necesario para resolver el problema ha sido el cambio de variable adecuado y sencillas manipulaciones algebraicas; el paso clave es dar con el cambio de variable apropiado que produce la máxima simplificación.

2.- Inyectividad y suprayectividad

Una de las simplificaciones que nos permite utilizar el conocer que la función incógnita $f(x)$ es inyectiva, es el que, ante una igualdad de la forma $f(A)=f(B)$, se deduce directamente que $A=B$, donde A y B pueden ser expresiones que contengan tanto a la función incógnita, como a variables y a constantes, Así, si se nos pidiera calcular todas las funciones inyectivas tales que

$$f\left(x+f(y)\right)=f\left(y+f(x)\right),$$

sabríamos directamente que

$$x+f(y)=y+f(x).$$

Sustituyendo ahora y=0, habríamos acabado, pues tendríamos que

$$f(x)=x+k,$$

donde $k=f(0)$ puede tomar a priori cualquier valor. Sustituyendo esta solución general en la ecuación dada, veríamos que es cierta para cualquier k, con lo que ésta sería la solución general (y única) del problema.

Si no sabemos a priori si una función incógnita $f(x)$ es inyectiva o no, puede ser un avance muy importante en la resolución del problema el demostrar que sí lo es. Las funciones inyectivas cumplen que, para cualesquiera x e y tales que $f(x)=f(y)$, entonces $x=y$. Esto nos ayuda a encontrar formas de probar la inyectividad, sobre todo si somos capaces de encontrar una relación de la forma $f(f(x))=A$, donde A es una expresión que depende de forma inyectiva de x (por ejemplo, $A=ax+b$, donde $a\neq 0$ y b son constantes). En este último caso, podemos decir que, si x e y son tales que $f(x)=f(y)$, entonces

$$ax+b=f\left(f\left(x\right)\right)=f\left(f\left(y\right)\right)=ay+b\,,$$

de donde $x=y$, y la inyectividad queda demostrada.

Otra forma de poder llegar a simplificar mucho ciertas ecuaciones funcionales es poder asignar ciertos valores a $f(x)$ o a $f(y)$ a voluntad. Por ejemplo, ciertas ecuaciones funcionales pueden resolverse sin más que hacer $f(x)=0$. Sin embargo, para eso es necesario tener garantizado que existe un x tal que $f(x)=0$. Eso se puede conseguir de dos formas: bien demostrando la suprayectividad de la función (es decir, que la función toma todos los posibles valores reales), bien llegando a una relación de la forma $f(A)=0$, donde A es una expresión cualquiera. Por muy complicada que sea la expresión A, lo que sí tenemos garantizado es que la función $f(x)$ toma el valor 0 para algún valor real de la variable λ. Realizando entonces la sustitución $x=\lambda$, y teniendo en cuenta que ahora x ya no es una variable, sino que toma un valor concreto, podemos simplificar la ecuación funcional. A partir de esa sustitución, es posible incluso que, tras la simplificación, nos quede una relación de la cuál seamos capaces de deducir el valor de λ, con lo que seguiríamos avanzando hacia la solución.

Nótese finalmente que no es necesario que sea la función la que tome todos los valores reales posibles; puede ser una expresión que depende de la función, la suma o diferencia de dos valores de la función, etc. De lo que se trata es de poder demostrar que existe una expresión que depende de la función que puede tomar cualquier valor, para poder asignárselo a voluntad.

Un ejemplo del uso de la suprayectividad lo podemos ver en el problema 6 de la XL Olimpiada Matemática Internacional (1999):

Encuentre todas las funciones *f*: ℝ→ℝ tales que

$$f\left(x-f\left(y\right)\right)=f\left(f\left(y\right)\right)+xf\left(y\right)+f\left(x\right)-1 \qquad \textbf{para cualesquiera } x,y\in\mathbb{R}.$$

Comenzamos en este caso haciendo $x=f(y)$, encontrando que

$$f\left(0\right)=2f\left(f\left(y\right)\right)+\left(f\left(y\right)\right)^2-1; \qquad \frac{1+f\left(0\right)-\left(f\left(y\right)\right)^2}{2}=f\left(f\left(y\right)\right).$$

Sustituimos ahora, en la ecuación inicial, x por $f(z)$:

$$f\left(f\left(z\right)-f\left(y\right)\right)=f\left(f\left(y\right)\right)+f\left(z\right)f\left(y\right)+f\left(f\left(z\right)\right)-1$$

$$=f\left(0\right)-\frac{\left(f\left(z\right)-f\left(y\right)\right)^2}{2},$$

donde hemos aplicado la fórmula hallada para $f(f(y))$. Ahora bien, si $f(z)-f(y)$ pudiera tomar todos los valores reales, habríamos acabado. Pero eso es cierto, ya que podemos escribir, partiendo de la ecuación dada en el enunciado,

$$f\left(x-f\left(y\right)\right)-f\left(x\right)=f\left(f\left(y\right)\right)+xf\left(y\right)-1.$$

Eligiendo ahora un y tal que $f(y)$ sea no nulo (que existe, pues haciendo $f(x)=f(y)=0$ en la ecuación dada llegaríamos a $0=-1$, que es obviamente falso), podemos tomar, para cualquier t real,

$$x=\frac{t+1-f\left(f\left(y\right)\right)}{f\left(y\right)},$$

$$f\left(\frac{z+1-f\left(f\left(y\right)\right)}{f\left(y\right)}-f\left(y\right)\right)-f\left(\frac{z+1-f\left(f\left(y\right)\right)}{f\left(y\right)}\right)=t.$$

Nótese que, por muy complicada que sea esta expresión, lo que sí nos garantiza es que cualquier real t se puede expresar como la diferencia de la función en dos puntos, es decir, existen u y v tales que $t=f(u)-f(v)$. Se tiene entonces que, para todo real t, existen u y v reales tales que

$$f\left(t\right)=f\left(f\left(u\right)-f\left(v\right)\right)=f\left(0\right)-\frac{\left(f\left(u\right)-f\left(v\right)\right)^2}{2}=f\left(0\right)-\frac{t^2}{2}.$$

Nos falta tan sólo hallar el valor de $f(0)$, para lo que podemos sustituir la expresión dada en la ecuación del enunciado, llegándose a

$$f(0)-\frac{x^2+\left(f(y)\right)^2-2xf(y)}{2}=f\left(x-f(y)\right)=f\left(f(y)\right)+xf(y)+f(x)-1$$
$$=f(0)-\frac{\left(f(y)\right)^2}{2}+xf(y)+f(0)-\frac{x^2}{2}-1;$$

Por comparación directa de los miembros primero y último, vemos que la mayor parte de los sumandos se simplifican, llegándose trivialmente a

$$f(0)=1.$$

Luego solución (que es única) es

$$f(x)=1-\frac{x^2}{2}.$$

para todo real x.

3.- Aditividad y multiplicatividad

Una función f se dice aditiva si para cualesquiera x e y se cumple que

$$f(x+y)=f(x)+f(y).$$

A partir de esta relación, se puede demostrar trivialmente que $f(0)=0$ (basta hacer $y=0$), y por inducción que, para cualquier natural n,

$$f(nx)=nf(x); \qquad f\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{f(x)}{n}.$$

Como además, haciendo $x=-y$,

$$0=f(0)=f(x)+f(y), \qquad f(-y)=f(x)=-f(y),$$

el resultado se extiende trivialmente a n entero. De aquí se sigue que, para cualquier racional $q=m/n$ (m y n enteros).

$$f(q)=f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{f(m)}{n}=\frac{m}{n}f(1)=q\cdot f(1).$$

Entonces, si f es continua, definiendo cualquier irracional x mediante el límite de una sucesión de números racionales, se puede ver que $f(x)=xf(1)$. Llamando pues $f(1)=m$, hemos demostrado que la única solución posible para funciones f aditivas y continuas es

$$f(x)=mx.$$

Una relajación nada desdeñable en la condición de continuidad es que ésta puede ser sustituida por la de monotonía; esto se debe a que podemos definir todo x irracional como el límite de una sucesión de intervalos encajados de extremos racionales $(q_{n,+},q_{n,-})$; entonces, la sucesión formada por $(f(q_{n,+}),f(q_{n,-}))=(q_{n,+}\cdot f(1),q_{n,-}\cdot f(1))$ define $f(x)=xf(1)$. Es decir, si tenemos una función f, real de variable real, y es monótona (es decir, no decreciente o no creciente), y además es aditiva, entonces $f(x)=mx$ para algún m. Si además es estrictamente creciente o decreciente, entonces m es no nulo.

Una función se dice multiplicativa si para cualesquiera x, y reales,

$$f(xy)=f(x)f(y).$$

Es trivial comprobar que, si $f(x)=0$ para algún x no nulo, entonces $f(z)=f(x)f(z/x)=0$ para todo z, mientras que si $f(0)$ es no nulo, entonces haciendo $y=0$ se concluye que $f(x)=1$ para todo x. Descartaremos en lo sucesivo estos dos casos triviales (que como se puede comprobar, son las únicas funciones multiplicativas constantes).

Haciendo $y=1$, se comprueba que $f(1)=1$. Es trivial constatar, haciendo $x=y=-1$, que bien $f(-1)=1$, bien $f(-1)=-1$. Haciendo $y=-1$, se comprueba entonces que, en el primer caso, $f(-x)=f(x)$ para todo x, y en el segundo que $f(-x)=-f(x)$ para todo x. Es también trivial comprobar que si $z>0$, tomando $x=y=\sqrt{z}$, se tiene

$$f(z)=\left(f\left(\sqrt{z}\right)\right)^2,$$

es decir, f toma sólo valores positivos para valores positivos de la variable. Nos basta pues hallar la restricción de f de forma que consideremos sólo valores reales positivos de la variable y de la función. Podemos entonces definir $u=\ln(x)$, $v=\ln(y)$, $g(u)=\ln(f(e^u))$, para encontrar que g, definida para todos los reales (pues x e y recorren todos los reales positivos) cumple

$$\begin{aligned} g(u+v) &= \ln\left(f\left(e^{u+v}\right)\right)=\ln\left(f(xy)\right)=\ln\left(f(x)f(y)\right) \\ &= \ln\left(f\left(e^{u}\right)\right)+\ln\left(f\left(e^{v}\right)\right)=g(u)+g(v). \end{aligned}$$

Entonces, si f es continua (o en su defecto monótona), al ser el logaritmo natural una función continua y estrictamente creciente, también g es continua (o en su defecto monótona). De aquí se obtiene finalmente que, para todo $x>0$,

$$f(x)=\exp\left(\ln\left(f\left(e^u\right)\right)\right)=e^{g(u)}=e^{mu}=\left(e^u\right)^m=x^m.$$

Luego si f es una función multiplicativa, que además es continua, o por lo menos monótona, entonces las únicas soluciones no triviales (no constantes) son $f(x)=x^m$ y $f(x)=|x^m|$ para algún m no nulo, siendo las soluciones triviales $f(x)=0$ y $f(x)=1$.

Es muy importante la condición de continuidad, o en su defecto, de monotonía. Obviamente, esta técnica de resolución se podría aplicar a funciones de variable entera, natural o racional, pero sólo si son monótonas (la continuidad obviamente no tendría sentido en esos casos). Veremos así, en la segunda entrega de esta serie de lecciones de preparación olímpica sobre ecuaciones funcionales, el caso de una función multiplicativa, definida sobre los racionales positivos, no monótona, cuya solución está muy lejos de tener la forma $f(x)=x^m$.

Un ejemplo de la aplicación de la aditividad, junto con otras técnicas ya descritas, se puede utilizar para resolver el problema 2 de la XXXIII Olimpiada Matemática Internacional (1992):

Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de todos los números reales. Encuentre todas las funciones f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tales que

$$f\left(x^2+f(y)\right)=y+\left(f(x)\right)^2 \qquad \textbf{para cualesquiera } x,y\in\mathbb{R}.$$

Para probar la inyectividad, nos basta con hacer $x=0$:

$$f\left(f(y)\right)=y+\left(f(0)\right)^2.$$

Como ya hemos visto, si ahora $f(x)=f(y)$, entonces

$$x+\left(f(0)\right)^2=f\left(f(x)\right)=f\left(f(y)\right)=y+\left(f(0)\right)^2, \qquad x=y.$$

Por otra parte, para cualquier valor real z, podemos tomar $y=z-(f(x))^2$:

$$f\left(x^2+f\left(z-\left(f(x)\right)^2\right)\right)=z-\left(f(x)\right)^2+\left(f(x)\right)^2=z,$$

con lo que $f(x)$ es suprayectiva. En concreto, existe un real λ (único por ser f inyectiva) tal que $f(\lambda)=0$. Entonces, haciendo $x=y=\lambda$ en la ecuación dada,

$$f\left(\lambda^2\right)=f\left(\lambda^2+f(\lambda)\right)=\lambda+\left(f(\lambda)\right)^2=\lambda, \qquad \lambda^2+\left(f(0)\right)^2=f\left(f\left(\lambda^2\right)\right)=f(\lambda)=0,$$

y como λ y $f(0)$ son reales, y la suma de sus cuadrados es cero, entonces ambos son 0. Luego $f(0)=0$, y por lo tanto $f(f(y))=y$. Además, haciendo $y=0$ en la ecuación dada,

$$f\left(x^2\right)=\left(f\left(x\right)\right)^2.$$

Esto implica que la imagen de cualquier valor real positivo es positiva, ya que cualquier valor real positivo se puede escribir como x^2 con x no nulo. Por otra parte, haciendo $y=f(-x^2)$ en la ecuación dada, tenemos que

$$0=f\left(0\right)=f\left(x^2+f\left(f\left(-x^2\right)\right)\right)=f\left(-x^2\right)+\left(f\left(x\right)\right)^2=f\left(-x^2\right)+f\left(x^2\right),$$

de donde $f(-x^2)=-f(x^2)$, o lo que es lo mismo, para todo z negativo, $f(z)=-f(-z)$, y la imagen de todo valor real negativo es negativa.

Sea ahora $y=f(z)$ en la ecuación inicial. Entonces,

$$f\left(x^2+y\right)=f\left(x^2+f\left(f\left(y\right)\right)\right)=f\left(y\right)+\left(f\left(x\right)\right)^2\geq f\left(y\right),$$

Con igualdad si y sólo si $f(x)=0$, es decir, si y sólo si $x=0$. Luego para cualquier $z>y$, podemos encontrar $x>0$ tal que $z=y+x^2$, y $f(z)>f(y)$, con lo que f es estrictamente creciente. Si llegamos pues a demostrar la aditividad de f (que parece relativamente aparente a partir de la ecuación funcional dada en el enunciado), entonces habremos demostrado que la única solución es de la forma $f(x)=mx$ con $m>0$. Veamos que es así: si al menos uno de u, v es positivo (sea u, sin pérdida de generalidad), podemos tomar $u=x^2$, $y=f(v)$ en la ecuación funcional dada, con lo que

$$f\left(u+v\right)=f\left(x^2+f\left(f\left(v\right)\right)\right)=f\left(v\right)+\left(f\left(x\right)\right)^2=f\left(v\right)+f\left(x^2\right)=f\left(v\right)+f\left(u\right).$$

Si tanto u como v son negativos, entonces $-u$ y $-v$ son positivos, con lo que

$$f\left(u+v\right)=-f\left(\left(-u\right)+\left(-v\right)\right)=-\left(f\left(-u\right)+f\left(-v\right)\right)=f\left(u\right)+f\left(v\right).$$

Luego f es aditiva, y como ya se ha visto, la única solución es de la forma $f(x)=mx$. Pero entonces $f(f(x))=m^2x=x$, con lo que $m^2=1$. Como además ha de ser $m>0$, por ser f estrictamente creciente, entonces $f(x)=x$ es la única solución.

4.- Puntos fijos

Un punto fijo de una función f se define como aquel valor p de la variable tal que $f(p)=p$. La existencia de puntos fijos nos puede ayudar mucho a resolver la ecuación funcional, usualmente porque podemos expresar el valor de dicho punto fijo a través de la propia función. Esta técnica se combina en la mayoría de los casos con una de las anteriores, a fin de llegar a la solución final.

Un ejemplo de esta técnica puede verse en una posible solución del problema 1 de la XXIV Olimpiada Matemática Internacional (1983):

Encuentre todas las funciones f definidas sobre el conjunto de los reales positivos y que toman valores reales positivos, y que satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $f(xf(y))=yf(x)$ **para x,y reales positivos cualesquiera;**

(ii) $f(x)\to 0$ **cuando** $x\to\infty$.

Obviamente, $f(x)$ es inyectiva; nos basta tomar $x=1$ en la condición (i), con lo que $f(f(y))=yf(1)$ para todo real positivo y, con lo que si $f(x)=f(y)$, entonces $xf(1)=yf(1)$, y como la función toma valores reales positivos, $x=y$. Al mismo tiempo, también es suprayectiva, ya que nos basta con tomar $y=z/f(1)$ en la anterior igualdad para cualquier real positivo z (este valor de y existe y es real positivo, por serlo por definición $f(1)$).
Ahora bien, tomando $y=1$ en la condición (i), se tiene que $f(x)=f(xf(1))$, y por inyectividad, $x=xf(1)$ para todo x, con lo que $f(1)=1$. Entonces, tomando $x=1$ en la condición (i), se llega a que $f(f(y))=y$ para todo real positivo y. Tomando finalmente $y=f(z)$ en la condición (i), llegamos a que, para cualesquiera x,z reales positivos,

$$f(xz)=f\left(xf\left(f(z)\right)\right)=f(z)f(x),$$

es decir, f es multiplicativa.
Sin embargo, no parece sencillo demostrar que f vaya a ser continua o monótona. De ahí que elijamos un método alternativo para hallarlo, basado en que, sustituyendo $y=x$ en la condición (i), se tiene que $xf(x)$ es un punto fijo de f para cualquier real positivo x. Es decir, para cada x, existe un real positivo $k(x)$ (no necesariamente el mismo para todo x) tal que $xf(x)=k(x)$, con $f(k(x))=k(x)$. Hemos hallado ya un tal punto fijo ($f(1)=1$).

Veamos ahora que, si k es un punto fijo, entonces también es punto fijo k^2. Para ello, nos basta hacer $x=k$ en $xf(x)$, con lo que $kf(k)=k^2$ también es punto fijo. Es trivial entonces comprobar por inducción que k^{2^N} es entonces un punto fijo para todo entero positivo N. Para $N=1$ ya se ha demostrado, y si $k^{2^{N-1}}$ es un punto fijo, también lo es

$$k^{2^{N-1}} f\left(k^{2^{N-1}}\right) = \left(k^{2^{N-1}}\right)^2 = k^{2^N}.$$

Supongamos entonces que existe un punto fijo $k>1$. Entonces, existe una sucesión

$$\left\{k, k^2, k^4, k^8, \ldots, k^{2^N}, \ldots\right\},$$

que obviamente tiende a infinito, de puntos fijos. Luego $f(x)$ no tiende a 0 cuando x tiende a infinito, en contradicción con el enunciado, pues $f(x)$ tiende a infinito al tender x a infinito dentro de esta sucesión. Luego no existe ningún punto fijo mayor que 1.

Supongamos finalmente que existe un punto fijo $k<1$. Por ser $f(x)$ multiplicativa,

$$1 = f(1) = f\left(k\frac{1}{k}\right) = f(k) f\left(\frac{1}{k}\right) = kf\left(\frac{1}{k}\right), \qquad f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k},$$

y $1/k$ sería un punto fijo mayor que 1. Luego no hay más puntos fijos que 1, y por lo tanto, para todo real positivo x, $xf(x)=1$, llegándose a la única solución $f(x)=1/x$.

Ahora bien, esta solución lo es cuando hacemos $y=x$, pero debemos comprobar que también lo es cuando $y\neq x$, lo cuál es cierto y fácilmente demostrable:

$$f(xf(y)) = f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y}{x} = yf(x).$$

Como se ha visto en el problema anterior, podemos encontrarnos con varios potenciales puntos fijos. Es necesario, en cada uno de estos casos, saber cuáles de estos potenciales puntos fijos realmente lo son, y cuál debemos utilizar en cada caso. Ilustraremos este hecho nuevamente con ayuda del problema 5 de la XXXV Olimpiada Matemática Internacional (1994):

Sea S el conjunto de los números reales estrictamente mayores que -1. Encuentre todas las funciones f:$S\rightarrow S$ que satisfacen las dos siguientes condiciones:

1. **$f(x+f(y)+xf(y))=y+f(x)+yf(x)$ para cualesquier x,y de S;**
2. **$f(x)/x$ es estrictamente creciente en cada uno de los intervalos $-1<x<0$ y $0<x$.**

En primer lugar, vemos fácilmente que f es inyectiva, haciendo x=0 en la condición 1:

$$f\left(f\left(y\right)\right)=y\left(1+f\left(0\right)\right)+f\left(0\right).$$

Ahora bien, como $f(0)+1>0$ por hipótesis del enunciado, si $f(x)=f(y)$, entonces

$$0=f\left(f\left(x\right)\right)-f\left(f\left(y\right)\right)=\left(x-y\right)\left(1+f\left(0\right)\right),$$

concluyéndose que $x=y$. Utilizando la inyectividad, podemos hacer y=0, teniéndose entonces que

$$f\left(x+f\left(0\right)+xf\left(0\right)\right)=f\left(x\right); \qquad x+f\left(0\right)+xf\left(0\right)=x.$$

De aquí se concluye que, para todo $x>-1$, $f(0)(1+x)=0$, con lo que $f(0)=0$. Entonces, haciendo x=0, en la condición 1, obtenemos que $f(f(y))=y$ para todo y de S, con lo que la función es también suprayectiva, pues toma todos los valores de S.

Una vez establecidas estas propiedades, podemos hacer $y=x$ en la condición 1, para obtener que para todo x de S,

$$f\left(x+f\left(x\right)+xf\left(x\right)\right)=x+f\left(x\right)+xf\left(x\right).$$

Es decir, $x+f(x)+xf(x)$ es un punto fijo de f para todo x de S. Nótese sin embargo que hay, como máximo, tres puntos fijos de f. Uno es el ya hallado $0=f(0)$. En el intervalo $(-1,0)$ puede haber como máximo uno, ya que si hubiera dos, $f(x)/x=1$ en ambos casos, lo cuál es imposible por la condición 2. Finalmente, sólo puede haber otro punto fijo mayor que 0 por la misma razón. Sean entonces k_- el (posible) punto fijo negativo, y k_+ el (posible) punto fijo positivo. Para cualquier valor de x, lo que si está claro sin embargo es que

$$x+f\left(x\right)+xf\left(x\right)=k; \qquad f\left(x\right)=\frac{k-x}{1+x},$$

donde para cada x, k puede tomar a priori cualquiera de los tres valores k_-, 0, k_+. Se tiene entonces que

$$f\left(k_+\right)=\frac{k-k_+}{1+k_+}=k_+; \qquad k_+\left(k_++2\right)=k.$$

Obviamente, no puede ser $-1<k\leq 0$, pues entonces sería $k_+\leq 0$ en contra de su definición. Luego ha de ser $k=k_+$, de donde se deduce que $k_+=-1$ o $k_+=0$, que es absurdo. Luego no existe ningún punto fijo mayor que 0. De forma análoga, y sabiendo ya que los únicos posibles puntos fijos son 0 y k_-, se tiene que

$$f\left(k_-\right)=\frac{k-k_-}{1+k_-}=k_-; \qquad k_-\left(k_-+2\right)=k.$$

Pero si k=0, entonces k_-=0 en contra de su definición o k_-=−2, que no pertenece a S. Luego k=k_-, llegándose a que k_-=−1, que tampoco pertenece a S.

Luego el único punto fijo es k=0, y por lo tanto, para todo x de S,

$$f(x) = -\frac{x}{1+x}.$$

Ahora bien, esta función es la única forma que puede llegar a tomar la solución de la ecuación funcional una vez que hacemos y=x, pero nadie nos garantiza que la vaya a cumplir cuando y≠x. Por ello, debemos comprobarlo:

$$f\left(x+f(y)+xf(y)\right) = f\left(x - \frac{y(1+x)}{1+y}\right) = f\left(\frac{x-y}{1+y}\right) = -\frac{\frac{x-y}{1+y}}{1+\frac{x-y}{1+y}}$$

$$= -\frac{x-y}{1+x} = y-(1+y)\frac{x}{1+x} = y+f(x)+yf(x).$$

Nótese además que, hasta ahora, sólo hemos utilizado la condición 2 para establecer el número de puntos fijos de f. Veamos sin embargo que también se cumple:

$$\frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{1+x}.$$

Como esta expresión existe, y es continua y derivable, en los dos intervalos considerados en la condición 2, podemos tomar su derivada,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \frac{1}{(1+x)^2},$$

Que al ser siempre positiva, garantiza el crecimiento de $f(x)/x$.

5.- Acotación de la función

Otra forma de hallar la función deseada puede ser mediante acotación de la misma. La forma exacta de utilizar esta técnica dependerá de las condiciones exactas impuestas sobre la función. En muchos casos, es posible que alguna condición de las impuestas sobre la función exija que su valor sea mayor o igual que una determinada cota, mientras que alguna otra resulta en que su valor sea menor o igual que la misma cota. Entonces, es obvio que la única posibilidad es que la función tome el valor de dicha cota. Esta doble acotación se puede utilizar, por ejemplo, en la resolución del problema 5 de la XXVII Olimpiada Matemática Internacional (1986):

Encuentre todas las funciones f, definidas sobre el conjunto de los reales no negativos, y tomando valores reales no negativos, tales que:

- **(i)** $f(xf(y))f(y)=f(x+y)$ **para cualesquiera** $x,y\geq 0$,
- **(ii)** $f(2)=0$,
- **(iii)** $f(x)\neq 0$ **para** $0\leq x<2$.

En primer lugar, es trivial constatar que, para todo $z>2$, podemos definir $y=2$, $x=z-2>0$, con lo que

$$f(z)=f(x+2)=f(2)f(xf(2))=0.$$

Luego $f(x)=0$ si y sólo si $x\geq 2$.

Entonces, tomando $x=2-y$ para cualquier $0\leq y<2$ (con lo que $f(y)$ es no nulo),

$$0=f(2)=f(x+y)=f(y)f((2-y)f(y)), \qquad (2-y)f(y)\geq 2,$$

$$f(y)\geq \frac{2}{2-y}.$$

Sin embargo, tomando $x=2-y-\varepsilon$, para cualquier $2>\varepsilon>0$, se tiene que

$$0\neq f(2-\varepsilon)=f(x+y)=f(y)f((2-y-\varepsilon)f(y)), \qquad (2-y-\varepsilon)f(y)<2,$$

Entonces, no puede ser

$$f(y)>\frac{2}{2-y},$$

como demostramos por reducción al absurdo; en caso de que sí lo fuera, existiría un $\delta>0$ tal que

$$f(y)=\frac{2}{2-y}+\delta.$$

Pero entonces, tomando

$$\varepsilon=\frac{(2-y)\delta}{f(y)}>0,$$

resultaría que $(2-y-\varepsilon)f(y)=2$, que es absurdo. Luego sólo puede ser, para todo $0\leq x<2$,

$$f(x)=\frac{2}{2-x}.$$

Nótese que entonces, para cualesquiera x,y cuya suma sea menor que 2,

$$f(xf(y))f(y)=\frac{2}{2-y}f\left(\frac{2x}{2-y}\right)=\frac{4}{4-2y-2x}=\frac{2}{2-y-x}=f(x+y).$$

El método utilizado para hallar esta solución ha sido el de doble acotación; comprobar que, para que se cumpla una de las condiciones, el valor de la función debe ser no inferior a un cierto valor, mientras que para que se cumpla otra, ha de ser no superior a dicho mismo valor. Este método no deja de ser útil en ciertas ocasiones, aunque no necesariamente en la mayoría de los casos.

Hay veces que el valor la función es "constante a trozos", o posee trozos en los que la función es constante. En este tipo de situaciones, puede ser interesante acotar la variable entre los dos extremos de un tal intervalo en el que la función sea constante, y sabiendo cuál es el valor en ambos extremos, sabemos cuál es el valor en cualquier punto de dicho intervalo. Esta técnica puede ser especialmente útil si todo lo que se pide es hallar el valor de la función en un punto dado, como sucede en el problema 3 de la VI Olimpiada Iberoamericana de Matemática (1991):

Sea f una función creciente definida para todo número real x, $0\leq x\leq 1$, tal que

a. $f(0)=0$,

b. $f(x/3)=f(x)/2$,

c. $f(1-x)=1-f(x)$.

Encontrar $f(18/1991)$.

Es trivial comprobar que

$$1-f\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{f(1)}{2}=\frac{1-f(0)}{2}=\frac{1}{2}.$$

Luego como $f(1/3)=f(2/3)$ y f es creciente, $f(x)=1/2$ para todo $1/3\leq x\leq 2/3$. De forma análoga, se puede comprobar que $f(x)=1/4$ para todo $1/9\leq x\leq 2/9$, y que $f(x)=3/4$ para todo $7/9\leq x\leq 8/9$, y así sucesivamente. Se tiene entonces que podemos encontrar, dentro del intervalo [0,1] en una serie de subintervalos cerrados en los cuales la función es constante, y para los cuáles el valor de f en los extremos se puede hallar tomando intervalos cada vez más pequeños, de longitudes sucesivas 1/3, 1/9, 1/27, etc. Entonces, podemos intentar acotar 18/1991 para ver en cuál de estos intervalos se halla. Basándose en esta misma idea, podemos hallar el valor de f(x), multiplicando x por 3 tantas veces como sea necesario hasta llegar a o superar el valor de 1/3; si el valor y obtenido tras estas multiplicaciones no supera 2/3, sabemos que $f(y)=1/2$, y dividiendo $f(y)$ por 2 tantas veces como hayamos multiplicado x por 3 para llegar a y, obtenemos el valor de $f(x)$. En caso contrario, tomamos $1-y$ (que será menor que 3) y repetimos el proceso. Entonces,

$$f\left(\frac{18}{1991}\right)=\frac{1}{2}f\left(\frac{54}{1991}\right)=\frac{1}{4}f\left(\frac{162}{1991}\right)=\frac{1}{8}f\left(\frac{486}{1991}\right)=\frac{1}{16}f\left(\frac{1458}{1991}\right)=\frac{1}{16}\left(1-f\left(\frac{533}{1991}\right)\right);$$

$$f\left(\frac{533}{1991}\right)=\frac{1}{2}f\left(\frac{1599}{1991}\right)=\frac{1}{2}\left(1-f\left(\frac{392}{1991}\right)\right);$$

$$f\left(\frac{392}{1991}\right)=\frac{1}{2}f\left(\frac{1176}{1991}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

ya que $1/3<1176/1991<2/3$ al ser $2\cdot 1991=3982>3528=3\cdot 1176>1991$. Luego

$$f\left(\frac{533}{1991}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{8};$$

$$f\left(\frac{18}{1991}\right)=\frac{1}{16}\left(1-\frac{3}{8}\right)=\frac{5}{128}.$$

Y hemos acabado.

6.- Otros problemas de ecuaciones funcionales

Existen finalmente otros problemas de ecuaciones funcionales, con funciones reales de variable real, que no se ajustan completamente a ninguna de las técnicas de resolución aquí planteadas. Pasamos finalmente a considerar algunos de ellos para ampliar el rango de posibles técnicas de resolución:

Problema 5 de la X Olimpiada Matemática Internacional (1968):

Sea *f* una función real de variable real, tal que, para una constante positiva *a*, la relación

$$f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-(f(x))^2}$$

se cumple para todo *x*.

(a) Demuestre que la función es periódica (es decir, que existe una constante *b* tal que *f*(*x*+*b*)=*f*(*x*) para todo *x*).

(b) Para *a*=1, dé un ejemplo de una función no constante con dicha propiedad.

Podemos restar 1/2 a ambos lados de la igualdad y elevar al cuadrado, para obtener, reorganizando términos, que

$$[f(x+a)]^2-f(x+a)+\frac{1}{4}=f(x)-(f(x))^2;$$

$$\left(f(x+a)-\frac{1}{2}\right)^2+\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Sustituyendo ahora x por $x+a$, se tiene que, para todo x real,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(f(x+2a)-\frac{1}{2}\right)^2=\left(f(x+a)-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)^2;$$

$$\left(f(x+2a)-\frac{1}{2}\right)^2=\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)^2.$$

Ahora bien, para todo x real, $f(x+a)$ es obviamente mayor o igual que 1/2, por ser igual la suma de 1/2 y una raíz no negativa. Luego para todo x, tanto $f(x)$ como $f(x+2a)$ son mayores o iguales que ½, de donde tomando la raíz cuadrada positiva (la negativa no tiene sentido) en esta última igualdad, se tiene que, para todo x real,

$$f(x+2a)-\frac{1}{2}=f(x)-\frac{1}{2},$$

y tomando $b=2a$, hemos demostrado que la función es periódica de periodo b.

Para dar un ejemplo, es útil comprobar que si la función fuera periódica de periodo a, entonces sería

$$f(x)=f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-(f(x))^2}; \qquad (f(x))^2-f(x)+\frac{1}{4}=f(x)-(f(x))^2;$$

$$f(x)=\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{2}}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4},$$

que es constante (se ha tomado sólo la raíz mayor porque la menor lleva a $f(x)<1/2$, que como se ha visto es falso). Necesitamos pues, para $f(x)$ no constante, buscar entre las funciones periódicas de periodo 2 pero no de periodo 1. Además, ha de ser

$$\left(f(x+1)-\frac{1}{2}\right)^2+\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Es también importante darse cuenda de que, para cualquier real x, $1/2\leq f(x)\leq 1$. La primera desigualdad se debe a que $f(x+a)$ es la suma de 1/2 y un término no negativo, mientras que la segunda se debe a que, en caso contrario, $f(x+a)$ sería complejo. De ahí que podemos pensar en dos estrategias:

1) buscar entre las funciones de la forma $f(x)=1/2+|\cos(Bx+\phi)|/2$, de las cuales se puede comprobar trivialmente que, tomando $B=\pi/2$ y para cualquier fase ϕ, se tratan de soluciones de la ecuación dada, o
2) tomar soluciones "constantes a trozos", donde durante un semiperiodo sea $f(x)=A$, y en el siguiente un valor B. Se puede comprobar fácilmente que, si $A=1/2$ y $B=1$, se cumple la relación dada, ya que

$$\frac{1}{2}+\sqrt{B-B^2}=\frac{1}{2}+\sqrt{1-1^2}=\frac{1}{2}=A,$$

$$\frac{1}{2}+\sqrt{A-A^2}=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1=B.$$

Estas dos son, probablemente, dos de las soluciones más sencillas, pero puede haber muchas más…

Nótese que, al final, la resolución del problema comienza por una de las técnicas ya mencionadas antes, el cambio de variable, si bien no se utiliza ninguna de las otras comentadas hasta ahora de ahí en adelante.

Problema 5 de la XIV Olimpiada Matemática Internacional (1972):

Sean f y g funciones reales de variable real, tales que para cualesquiera valores reales x,y, se cumple la ecuación

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)g(y).$$

Demuestre que si $f(x)$ no es idénticamente nula, y $|f(x)|\leq 1$ para todo x, entonces $|g(y)|\leq 1$ para todo y.

El cambio de variable es una estrategia interesante también en este caso. La aplicaremos para demostrar el resultado pedido por reducción al absurdo. Supongamos entonces que existe un valor de y tal que $|g(y)|>1$. Se tiene entonces, en virtud de la desigualdad triangular, que

$$|f(x+y)|+|f(x-y)|\geq|f(x+y)+f(x-y)|=2|f(x)||g(y)|>2|f(x)|.$$

Es decir, al menos uno de los dos valores absolutos del miembro de la izquierda es mayor que el valor absoluto presente en el miembro de la derecha. Sin pérdida de generalidad, sea $|f(x+y)|=|f(x)|+\Delta$, donde $\Delta>0$, ya que siempre podemos cambiar a y de signo sin afectar a la premisa del problema o al resultado a demostrar. Entonces, sustituyendo x por $x+y$ en la relación dada en el enunciado,

$$\begin{aligned}|f(x+2y)|+|f(x)|\geq|f(x+2y)+f(x)|=2|f(x+y)||g(y)|>2|f(x+y)|\\=2|f(x)|+2\Delta;\end{aligned}$$

$$|f(x+2y)|>|f(x)|+2\Delta.$$

Demostraremos entonces por inducción que, para todo $n\geq2$,

$$|f(x+ny)|>|f(x+(n-1)y)|+\Delta\geq|f(x)|+n\Delta.$$

La hipótesis de inducción ha sido ya probada para $n=2$. Si se cumple para un cierto valor n, entonces sustituyendo x por $x+ny$ en la relación dada en el enunciado,

$$\begin{aligned}|f(x+(n+1)y)|+|f(x+(n-1)y)|\geq|f(x+(n+1)y)+f(x+(n-1)y)|\\=2|f(x+ny)||g(y)|>2|f(x+ny)|;\end{aligned}$$

Utilizando ahora la hipótesis de inducción,

$$|f(x+(n+1)y)|>2|f(x+ny)|-|f(x+(n-1)y)|>|f(x+ny)|+\Delta>|f(x)|+(n+1)\Delta.$$

Entonces, para un entero positivo $N>1/\Delta$, que existe por ser $\Delta>0$, se tiene que

$$|f(x+Ny)|>|f(x)|+N\Delta>0+1=1.$$

Hemos llegado a una contradicción, luego siempre es $|g(y)|\leq1$. Nótese que esta es la mejor acotación posible, ya que $g(y)=1$ para todo y cuando $f(x)=k$, con k constante de valor absoluto menor o igual que 1.

Referencias: Varios de los problemas propuestos en las Olimpiadas Matemáticas Española, Iberoamericana e Internacional se pueden encontrar en http://platea.pntic.mec.es/csanchez/olimmain.htm, http://www.oei.es/oim/problemas.htm y http://imo.math.ca, respectivamente.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita: