



Este documento es de distribución gratuita  
y llega gracias a

*"Ciencia Matemática"*

[www.cienciamatematica.com](http://www.cienciamatematica.com)

El mayor portal de recursos educativos a tu servicio!

## PROBLEMAS CUADRÁTICOS DE OLIMPIADAS

Francisco Bellot Rosado

Presentamos a continuación una serie de problemas de Olimpiadas con la característica común de hacer intervenir en ellos, en mayor o menor medida, las propiedades del trinomio de segundo grado. Aunque a primera vista podría parecer que debería tratarse de problemas o ejercicios muy sencillos ( todo el mundo cree saber resolver una ecuación de segundo grado), el examen de los ejemplos que presentamos quizá haga variar semejante opinión.

Recordamos las relaciones de Cardano-Vieta para el polinomio de segundo grado :

Si  $\alpha, \beta$  son las raíces (reales o complejas) del polinomio  $x^2 + px + q$ , la identificación de coeficientes en los dos miembros de

$$(x - \alpha)(x - \beta) = x^2 + px + q$$

proporciona las igualdades

$$\begin{aligned} -(\alpha + \beta) &= p \\ \alpha\beta &= q. \end{aligned}$$

El método de completamiento de cuadrado aplicado al polinomio

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

permite escribirlo en la forma

$$P(x) = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a},$$

de donde se deduce la conocida fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

La expresión  $\Delta = b^2 - 4ac$  es el discriminante, porque separa las raíces : Si  $\Delta > 0$ ,  $P(x)$  tiene dos raíces reales, si  $\Delta = 0$  tiene una raíz real doble; si  $\Delta < 0$ , no tiene raíces reales.

### Problema 1

Si  $P(x) = x^2 + ax + b$ ,  $Q(x) = x^2 + px + q$ , hallar la condición para que los dos polinomios tengan una raíz común.

### Solución

Si  $x_1, x_2$  son las raíces (reales o complejas) de  $P$ , sustituyéndolas en  $Q$  y calculando  $Q(x_1) \cdot Q(x_2)$ , obtenemos

$$Q(x_1) \cdot Q(x_2) = x_1^2 x_2^2 + q(x_1^2 + x_2^2) + px_1 x_2(x_1 + x_2) + p^2 x_1 x_2 + pq(x_1 + x_2) + q^2$$

De las relaciones de Cardano-Vieta para  $P$  resulta que

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= -a \\x_1 x_2 &= b \\x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = a^2 - 2b\end{aligned}$$

así que sustituyendo en la expresión anterior resultará

$$Q(x_1) \cdot Q(x_2) = (q - b)^2 + (p - a)(bp - aq),$$

y como, evidentemente, la condición para que una de las raíces de  $P$  sea también raíz de  $Q$  es  $Q(x_1) \cdot Q(x_2) = 0$ , resulta la condición necesaria y suficiente buscada escrita como

$$(q - b)^2 + (p - a)(bp - aq) = 0.$$

### Problema 2

Sea  $f(x) = a^2 x^2 - (b^2 - 2ac)x + c^2$ , con  $a, b, c \in \mathbb{Q}_+^*$ . Probar que si existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f(n) = 0$ , entonces  $n$  es cuadrado perfecto.

(Cr. Mortici, *Gazeta Matematică 1987, Rumania*)

### Solución

Las raíces de la ecuación son

$$\frac{b^2 - 2ac \pm b\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a^2};$$

para que alguna de ellas sea entera, debe existir  $k$  entero tal que  $b^2 - 4ac = k^2$ . Entonces se tiene

$$b^2 - k^2 = 4ac, \quad \frac{b^2 - k^2}{2} = 2ac$$

así que sustituyendo en la expresión para las raíces de la ecuación se obtiene

$$\frac{b^2 - \frac{b^2 - k^2}{2} \pm bk}{2a^2} = \frac{b^2 + k^2 \pm 2bk}{4a^2} = \left(\frac{b \pm k}{2a}\right)^2, \text{ que es un cuadrado.}$$

### Problema 3

Sea  $a$  un número real dado. Calcular los números reales  $x_1, \dots, x_n$  que son soluciones del sistema

$$\left. \begin{aligned}x_1^2 + ax_1 + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 &= x_2 \\x_2^2 + ax_2 + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 &= x_3 \\&\dots \\x_{n-1}^2 + ax_{n-1} + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 &= x_n \\x_n^2 + ax_n + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 &= x_1\end{aligned} \right\}$$

(Torneo de las Ciudades)

**Solución**

Sumando miembro a miembro todas las ecuaciones :

$$(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + (a - 1)(x_1 + \dots + x_n) + n \left( \frac{a - 1}{2} \right)^2 = 0$$

y el primer miembro se escribe como

$$x_1^2 + (a - 1)x_1 + \left( \frac{a - 1}{2} \right)^2 + \dots + x_n^2 + (a - 1)x_n + \left( \frac{a - 1}{2} \right)^2 = 0,$$

es decir

$$\left( x_1 + \frac{a - 1}{2} \right)^2 + \dots + \left( x_n + \frac{a - 1}{2} \right)^2 = 0,$$

luego todos los paréntesis deben ser nulos y así se obtiene

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1 - a}{2}.$$

Inmediatamente se comprueba por sustitución directa que esta solución verifica las ecuaciones iniciales del sistema.

**Problema 4**

Sea  $f(x)$  un polinomio con coeficientes reales tal que  $f(x) \geq 0$  para todo  $x$  real. Demostrar que  $f(x)$  puede escribirse en la forma

$$f(x) = (g_1(x))^2 + (g_2(x))^2 + \dots + (g_n(x))^2,$$

donde los  $g_i$  son polinomios con coeficientes reales.

(Propuesto por Hungría, no usado, IMO 1973)

**Solución** (de M<sup>a</sup> Ascensión López Chamorro)

$f$  tiene que ser de grado par y tendrá un mínimo absoluto mayor o igual que 0; además el coeficiente principal y el término independiente son positivos.

Si  $f$  es de segundo grado,

$$f(x) = ax^2 + bx + c = \left( \sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right)^2 + \left( \sqrt{c - \frac{b^2}{4a}} \right)^2$$

y esa descomposición responde a las condiciones del problema (en este caso,  $g_2$  es un polinomio constante).

Procedemos a continuación por inducción sobre el grado del polinomio  $f$ : supongamos la proposición cierta para cualquier polinomio de grado  $2(n - 1)$ ; sea  $gr(f) = 2n$  y  $\beta = f(\alpha) \geq 0$  el mínimo del polinomio  $f$ . Entonces

$$f(x) - \beta = (x - \alpha)^2 f_{2(n-1)}(x) = (x - \alpha)^2 \sum_{h=1}^k (g_h(x))^2$$

así que en este caso se tiene

$$f(x) = \sum_{h=1}^k ((x - \alpha)^2 g_h(x))^2 + (\sqrt{\beta})^2$$

y hemos terminado la fase inductiva, lo que prueba la proposición.

### Problema 5

Sean  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Resolver (¡numéricamente!) la ecuación

$$(ax - b)^2 + (bx - a)^2 = x,$$

sabiendo que admite una raíz entera.

(M. Becheanu, *Gazeta Matematică, Rumania*)

### Comentario

Este es, en mi opinión, "el más bello problema sobre la ecuación de segundo grado jamás propuesto"; la solución es del proponente del problema, Mircea Becheanu, Jefe de la Delegación Rumana en la IMO.

### Solución

Si  $a = b = 0$ , la ecuación es de primer grado, con solución única  $x = 0$ .

Supongamos  $a \neq 0$  ó  $b \neq 0$ . La ecuación es

$$(a^2 + b^2)x^2 - (4ab + 1)x + a^2 + b^2 = 0,$$

de segundo grado, con raíces  $x_1, x_2$ , siendo  $x_1 \in \mathbb{Z}$ . Como

$$x_1 = (ax_1 - b)^2 + (bx_1 - a)^2,$$

deducimos que  $x_1$  es, además de entero, positivo. Como las raíces son reales, el discriminante de la ecuación será mayor o igual que cero:

$$(4ab + 1)^2 - 4(a^2 + b^2)^2 \geq 0 \iff [1 - 2(a - b)^2] [1 + 2(a - b)^2] \geq 0$$

y esto exige que  $1 - 2(a - b)^2 \geq 0$ . Puesto que  $(a - b)^2$  es natural, resulta necesariamente  $(a - b)^2 = 0$ , es decir,  $a = b$ .

Con esto, la ecuación se convierte en

$$2a^2 - (4a^2 + 1)x + 2a^2 = 0 \quad (**)$$

y, según las fórmulas de Cardano-Vieta, se tiene

$$x_1 + x_2 = 2 + \frac{1}{2a^2}, \quad x_1 x_2 = 1.$$

Observamos que, al ser  $x_1 \in \mathbb{N}$ ,  $x_1 = 0$  no puede ser raíz de (\*\*), ni tampoco  $x_1 = 1$  puede serlo. Por lo tanto,  $x_1 \geq 2$ . Ya que  $x_2 = \frac{1}{x_1} > 0$ , entonces  $x_1 < x_1 + x_2 = 2 + \frac{1}{2a^2} < 3$ . Por lo tanto  $2 \leq x_1 < 3$  con  $x_1$  entero implica  $x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}$ . Sustituyendo los valores resulta  $a^2 = 1$ , así que  $a \in \{-1, 1\}$ .

La única posibilidad, entonces, es  $a = b = \pm 1$ , con raíces  $2, \frac{1}{2}$ .

**Problema 6**

Hallar una condición necesaria y suficiente para que la ecuación  $ax^2+bx+c=0$ ,  $a \neq 0$ , tenga una de sus raíces igual al cuadrado de la otra.

(*Cruz Mathematicorum 1973, Canadá*)

**Solución**

Sean  $r$  y  $r^2$  las raíces; entonces

$$r^2 + r = -\frac{b}{a}, \quad r^3 = \frac{c}{a}.$$

Puesto que se verifica

$$(r^2 + r)^3 = r^3 (r + 1)^3 = r^3 (r^3 + 3(r^2 + r) + 1)$$

se tiene la condición necesaria

$$\left(-\frac{b}{a}\right)^3 = \frac{c}{a} \left(\frac{c}{a} - 3\frac{b}{a} + 1\right) \iff b^3 + ca(c+a) = 3abc \quad (*).$$

Esta condición es suficiente, porque si (\*) se cumple, y llamamos  $R, r$  a las raíces, sustituyendo  $-\frac{b}{a} = R + r$ ,  $\frac{c}{a} = Rr$ , en la primera de las dos expresiones (\*) se obtiene

$$(R + r)^3 = Rr [Rr + 3(R + r) + 1] \iff (R^2 - r)(R - r^2) = 0,$$

lo que prueba que una de las raíces es el cuadrado de la otra.

**Problema 7**

Resolver la ecuación

$$\left[ \frac{2x^2}{x^2 + 1} \right] = x,$$

siendo  $\lfloor \rfloor$  la parte entera.

(*Gazeta Matematică, Rumania, 1990*)

**Solución**

Como  $\frac{2x^2}{x^2+1} \geq 0$ ,  $\left[ \frac{2x^2}{x^2+1} \right]$  es natural, luego  $x$  es natural.

Aplicamos la desigualdad de las medias armónica y geométrica a los números positivos 1 y  $x^2$ : se tendrá

$$\frac{2}{1 + \frac{1}{x^2}} \leq \sqrt{1 \cdot x^2} = x \implies \frac{2x^2}{x^2 + 1} \leq x \quad (1).$$

Por otra parte, como

$$\left[ \frac{2x^2}{x^2 + 1} \right] \leq \frac{2x^2}{x^2 + 1},$$

resulta según el enunciado

$$x \leq \frac{2x^2}{x^2 + 1} \quad (2),$$

así que será

$$x = \frac{2x^2}{x^2 + 1},$$

de donde  $x = 0$  ó  $x = 1$ .

### Problema 8

Sean  $a, b \in \mathbb{N}^*$  y la ecuación  $(x - a)^2 + (x - b)^2 = 2ab - 1$ .

Demostrar que :

i) la ecuación no tiene raíces racionales.

ii) Si  $b = a + 1$ , entonces la ecuación tiene raíces reales, y en este caso hallar la parte entera de las raíces de la ecuación.

(*Gazeta Matematică, Rumania*)

### Solución

i) La ecuación se puede escribir como

$$2x^2 - 2(a + b)x + (a - b)^2 + 1 = 0.$$

La siguientes condiciones son equivalentes:

$$\begin{aligned} x_1, x_2 \in \mathbb{Q} &\iff \exists k \in \mathbb{Z} \left[ (a + b)^2 - 2(a - b)^2 - 2 \right] = k^2 \\ &\iff (a + b)^2 - 2(a - b)^2 - 2 = l^2, l \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Sean  $p = a + b, q = a - b$ . Como  $p$  y  $q$  son de la misma paridad, distinguiremos dos casos:

1)  $p = 2u, q = 2v$ , con  $u, v \in \mathbb{Z}$ . Entonces

$$(a + b)^2 - 2(a - b)^2 - 2 = 4u^2 - 8v^2 - 2.$$

Puesto que 2 divide a  $4u^2 - 8v^2 - 2$ , pero 4 no, es imposible que  $4u^2 - 8v^2 - 2$  sea un cuadrado perfecto.

2)  $p = 2u + 1, q = 2v + 1$ . En este caso,

$$(a + b)^2 - 2(a - b)^2 - 2 = 4u(u + 1) - 8v(v + 1) - 3 = 8t + 5, t \in \mathbb{Z}.$$

Como el resto de la división por 8 de un cuadrado perfecto puede ser 0, 1 ó 4, tampoco en este caso  $\Delta$  es un cuadrado perfecto.

Por lo tanto, las raíces de la ecuación no son racionales.

ii) Si  $b = a + 1$ , la ecuación es  $x^2 - (2a + 1)x + 1 = 0$ , cuyo discriminante es  $4a^2 + 4a - 3$ . Como  $a \in \mathbb{N}^*$ ,  $\Delta \geq 5$ , así que las raíces son reales y distintas :  $x_1 < x_2$ . Sea la función

$$f(x) = x^2 - (2a + 1)x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Se tiene :  $f(0) = 1 > 0$ ;  $f(1) = 1 - 2a < 0$ ;  $f(2a) = 1 - 2a < 0$ ,  $f(2a + 1) > 0$ . Resulta así

$$0 < x_1 < 1 < 2a < x_2 < 2a + 1$$

y  $[x_1] = 0, [x_2] = 2a$ .

**Problema 9**

Demostrar que  $n^4 + 4$  nunca es primo si  $n > 1$  (Sophie Germain)

Generalización :  $4^n + n^4$  no es primo si  $n > 1$ .

(Olimpiada de Brasil)

**Solución**

Se tiene

$$n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - 4n^2 = (n^2 + 2 - 2n)(n^2 + 2 + 2n)$$

Es claro que el último factor es mayor que 1. En cuanto al otro,

$n^2 + 2 - 2n = (n - 1)^2 + 1$  es igualmente mayor que 1 si  $n \neq 1$ .

Generalización :

Si  $n$  es par, es obvio que  $4^n + n^4$  es par y mayor que 2, luego no es primo.

Estudiaremos el caso impar utilizando la identidad (llamada de Sophie Germain)

$$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2 + \sqrt{2}xy)(x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy).$$

Entonces, si  $n = 2k + 1, 4^n = 4^{2k+1} = (\sqrt{2} \cdot 2^k)^4$ , así que podemos escribir

$$4^n + n^4 = (\sqrt{2} \cdot 2^k)^4 + n^4 = (2^n + n^2 + 2^{k+1} \cdot n)(2^n + n^2 - 2^{k+1} \cdot n)$$

Comprobemos finalmente que el menor de los dos factores anteriores no es igual a 1:

$$\begin{aligned} 2^n + n^2 - 2^{k+1} \cdot n &= 2^{2k+1} + (2k + 1)^2 - 2^{k+1}(2k + 1) = \\ &= 2 \cdot 2^{2k} - 2 \cdot 2^{2k}(2k + 1) + (2k + 1)^2 = [2^k - (2k + 1)]^2 + 2^{2k} \geq 5 \text{ pues } \\ &k > 0. \end{aligned}$$

**Problema 10**

Hallar los números reales positivos  $x, y$  sabiendo que las cuatro medias

$$a = \frac{x + y}{2}, g = \sqrt{xy}, h = \frac{2xy}{x + y}, k = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}$$

son números naturales cuya suma vale 66.

(Olimpiada de la República Checa, 1995)

**Solución**

Ya que 66 no es divisible por 4, no puede ser  $a = g = h = k$ , en consecuencia, por la desigualdad de las medias, será

$$h < g < a < k.$$

Sea  $c$  el máximo común divisor de  $a$  y  $g$ . Entonces



$a = ca_1, \quad g = cg_1$  donde  $g_1 < a_1$  son primos entre sí.

Ya que  $h = \frac{g^2}{a} = \frac{cg_1^2}{a_1}$ , el número  $c$  debe ser divisible por  $a_1$ , es decir  $c = da_1$  para algún número natural  $d$ . Las cuatro medias se pueden ahora expresar mediante  $d, a_1, g_1$  :

$$h = dg_1^2, \quad g = da_1g_1, \quad a = da_1^2, \quad k = \sqrt{2a^2 - g^2} = da_1\sqrt{2a_1^2 - g_1^2}.$$

Ya que la raíz cuadrada de un número natural es natural o irracional, el número  $\sqrt{2a_1^2 - g_1^2}$  debe ser natural (que es además mayor que  $a_1$ , porque  $g_1 < a_1$ ). De aquí que el tercer y cuarto sumandos de la igualdad

$$dg_1^2 + da_1g_1 + da_1^2 + da_1\sqrt{2a_1^2 - g_1^2} = 66 \quad (*)$$

son los dos mayores que  $a_1^2$  (ya que  $d \geq 1$ ). De aquí se sigue que  $2a_1^2 < 66$ , es decir,  $a_1 < 5$ . Se comprueba fácilmente que de las diez raíces cuadradas

$$\sqrt{2a_1^2 - g_1^2}, \quad 1 \leq g_1 < a_1 \leq 5$$

la única que es entera es  $\sqrt{2 \cdot 5^2 - 1^2}$ , con  $a_1 = 5, g_1 = 1$ .

Sustituyendo en (\*) se obtiene  $d = 1$ , lo que da  $(h, g, a, k) = (1, 5, 25, 35)$ . Los números  $x, y$  son las soluciones de la ecuación

$$t^2 - 50t + 25 = 0,$$

es decir

$$\{x, y\} = \{25 + 10\sqrt{6}, 25 - 10\sqrt{6}\}.$$

### Problema 11

Sea  $m$  un número real, tal que las raíces  $x_1$  y  $x_2$  de la ecuación

$$f(x) = x^2 + (m - 2)x + m^2 - 3m + 3 = 0$$

son reales.

- Hallar todos los valores de  $m$  para los cuales  $x_1^2 + x_2^2 = 6$ .
- Probar que

$$1 < \frac{mx_1^2}{1 - x_1} + \frac{mx_2^2}{1 - x_2} + 8 \leq \frac{121}{9}$$

(*Olimpiada de Bulgaria, 1995*)

### Solución

- Ya que la ecuación tiene dos raíces reales, su discriminante

$$(m - 2)^2 - 4(m^2 - 3m + 3) = -3m^2 + 4m + 4 \geq 0,$$

luego  $-\frac{2}{3} \leq m \leq 2$ .

Por otra parte,

$$6 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = -m^2 - 2m + 10.$$

De aquí se obtiene  $m = -1 \pm \sqrt{5}$ , pero

$$-1 - \sqrt{5} < -\frac{2}{3} < -1 + \sqrt{5} < 2,$$

y por lo tanto sólo  $m = -1 + \sqrt{5}$  es solución del problema.

b) Se tiene

$$\begin{aligned} \frac{mx_1^2}{1-x_1} + \frac{mx_2^2}{1-x_2} &= \frac{m[x_1^2(1-x_2) + x_2^2(1-x_1)]}{f(1)} \\ &= \frac{x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2(x_1+x_2)}{m-2} \\ &= \frac{m^3 - 8m^2 + 13m - 2}{m-2} \\ &= m^2 - 6m + 1. \end{aligned}$$

Entonces, si llamamos

$$F = \frac{mx_1^2}{1-x_1} + \frac{mx_2^2}{1-x_2} + 8,$$

resulta  $F = (m-3)^2$ , y entonces

$$\frac{121}{9} = \left(-\frac{2}{3} - 3\right)^2 \geq F > (2-3)^2 = 1.$$

### Problema 12

Se considera la función cuadrática  $f(x) = -x^2 + 4px - p + 1$ . Sea  $S$  el área del triángulo del que dos vértices son los puntos de intersección de  $f(x)$  con el eje de abscisas, mientras que el tercer vértice es el vértice de la parábola. Hallar todos los racionales  $p$  tales que  $S$  es entero.

(*Olimpiada de Bulgaria 1995*)

#### Solución

El discriminante de  $f(x)$  es  $D = 4(4p^2 - p + 1) > 0$  para todo  $p$  real. En consecuencia  $f(x)$  tiene dos raíces reales  $x_1$  y  $x_2$ , y la parábola corta al eje  $x$  en dos puntos distintos, A y B. El vértice C de la parábola tiene coordenadas  $2p$  y  $h = f(2p) = 4p^2 - p + 1 > 0$ . Se tiene

$$AB = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = 2\sqrt{4p^2 - p + 1}$$

Ahora calculamos

$$S = S_{ABC} = \frac{AB \cdot h}{2} = (4p^2 - p + 1)^{3/2}.$$

Llamemos  $q = 4p^2 - p + 1$ . Ya que  $q$  es racional, y  $q^3 = S^2$  es entero, entonces  $q$  es entero también. Entonces  $\frac{S}{q}$  es racional, y como su cuadrado  $\left(\frac{S}{q}\right)^2 = q$  es entero, entonces  $\frac{S}{q}$  es igualmente entero. Por lo tanto  $q = n^2$ , siendo  $n$  un entero positivo :

$$4p^2 - p + 1 - n^2 = 0.$$

Esta ecuación cuadrática (respecto de  $p$ ) tiene una raíz racional exactamente cuando su discriminante  $16n^2 - 15$  es el cuadrado de un número racional. Por lo tanto  $16n^2 - 15 = m^2$ , y no hay pérdida de la generalidad en suponer  $m$  entero positivo. De la igualdad

$$(4n - m)(4n + m) = 15$$

obtenemos

$$\left. \begin{array}{l} 4n - m = 1 \\ 4n + m = 15 \end{array} \right\} \text{ o bien } \left. \begin{array}{l} 4n - m = 3 \\ 4n + m = 5 \end{array} \right\}$$

De aquí que  $n = 2, m = 7$  o bien  $n = 1, m = 1$ .

Los números racionales que estamos buscando son  $0, 1, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}$ .

### Problema 13

¿Para qué funciones cuadráticas  $f(x)$  existe una función cuadrática  $g(x)$  tal que las raíces de la ecuación  $g(f(x)) = 0$  son cuatro términos consecutivos (distintos) de una progresión aritmética y al mismo tiempo son también raíces de la ecuación  $f(x) \cdot g(x) = 0$ ?

(Olimpiada de Chequia 2000)

### Solución

Se sigue de las hipótesis que cada una de las ecuaciones  $f(x) = 0, g(x) = 0$  tiene dos raíces reales, y esas 4 raíces son distintas. Llamemos  $x_1$  y  $x_2$  a las raíces de  $f(x) = 0$ . Entonces  $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ , donde  $a$  es un número real,  $a \neq 0$ . Por hipótesis,  $x_1$  es también raíz de  $g(f(x))$ , luego  $g(f(x_1)) = g(0) = 0$ . Por lo tanto,  $g(x) = 0$  admite la raíz 0; sea  $b$  la otra raíz de esta ecuación : se tendrá  $g(x) = cx(x - b), c \neq 0$ .

Los números 0 y  $b$  son también raíces de  $g(f(x)) = 0$  :

$$\begin{aligned} g(f(0)) &= cf(0)(f(0) - b) = 0, \\ g(f(b)) &= cf(b)(f(b) - b) = 0. \end{aligned}$$

Como los números 0 y  $b$  no pueden ser raíces de  $f$ , se sigue de ello que  $f(0) = f(b) = b$ .

Así, sobre el eje real, los dos puntos 0 y  $b$ , así como los puntos  $x_1$  y  $x_2$  son simétricos con respecto a la primera coordenada del vértice de la parábola

$y = f(x)$ . Los números  $0, b, x_1$  y  $x_2$  (que forman una progresión aritmética por hipótesis) pueden ser ordenados de dos maneras:

· Los números  $x_1$  y  $x_2$  son interiores al intervalo  $[0, b]$ . Entonces, (con una elección apropiada de los subíndices),  $x_1 = b/3, x_2 = 2b/3$ , luego

$$b = f(0) = a \left( -\frac{b}{3} \right) \left( -\frac{2b}{3} \right) = \frac{2ab^2}{9} \implies b = \frac{9}{2a}$$

y

$$f(x) = a \left( x - \frac{3}{2a} \right) \left( x - \frac{3}{a} \right) = ax^2 - \frac{9}{2}x + \frac{9}{2a}.$$

· Los números  $0$  y  $b$  son interiores al intervalo  $[x_1, x_2]$ . Entonces (eligiendo apropiadamente los subíndices),  $x_1 = -b, x_2 = 2b$ , de donde

$$b = f(0) = ab(-2b) = -2ab^2 \implies b = -\frac{1}{2a}$$

y

$$f(x) = a \left( x - \frac{1}{2a} \right) \left( x + \frac{1}{a} \right) = ax^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2a}.$$