EL MÉTODO DE INDUCCIÓN
Lección de preparación olímpica
Francisco Bellot Rosado

Cuando se desea probar que una cierta proposición es cierta para *todos* los números naturales, es particularmente útil el procedimiento de demostración conocido como *método de inducción,* del que vamos a ver en qué consiste y cómo se utiliza. La situación se asemeja a la siguiente : supongamos que tenemos una escalera con *infinitos peldaños ;* ¿cómo podríamos describir un procedimiento que nos permitiera asegurar que subimos todos los peldaños de la escalera? Una manera de resolver esto sería la siguiente :

1) Subimos el primer peldaño de la escalera.

2) Suponiendo que hayamos subido hasta un peldaño *cualquiera,* subimos al siguiente.

Para ser algo más precisos, formularemos el principio de inducción en los siguientes términos : Queremos demostrar que una proposición P es cierta para todos los números naturales. (Como puede verse, resultará imprescindible *conocer* con precisión la formulación de la proposición P).

Entonces procederemos en dos etapas :

1) Verificamos que P es cierta para el primer número natural (*generalmente será el 0 ó el 1, dependiendo de cómo se formule* P).

2) (*Fase inductiva) : Suponiendo que* P *es cierta para un número natural cualquiera, demostramos que también lo es para el siguiente.*

Necesitamos fijar una cierta notación para representar ese número natural cualquiera del que hablamos, así como el siguiente. Generalmente se emplea UNA de las letras

$$i, j, k, n$$

para representar ese número natural arbitrario, y según la que elijamos, el siguiente número natural vendrá representado por

$$i + 1, j + 1, k + 1, n + 1,$$

respectivamente.

Veamos un primer ejemplo. Consideremos la suma

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1) + n,$$

donde n es un número natural. Debe observarse que, en realidad, estamos considerando una familia de sumas :

$$\begin{array}{l} 1 \\ 1+2 \\ 1+2+3 \\ 1+2+3+4 \\ etc \end{array}$$

donde el número de sumandos es variable.

¿Existirá una fórmula "cerrada", es decir, con un número finito de operaciones, que nos permita obtener el valor de S_1 para cada valor de n?

La respuesta es afirmativa :

$$\begin{aligned} S_1 &= 1+2+3+\cdots+n \\ S_1 &= n+(n-1)+\cdots+1 \end{aligned}$$

y sumando "por columnas" se obtiene

$$2S_1 = (n+1)n,$$

con lo cual hemos demostrado que

$$S_1 = 1+2+3+\cdots+(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad (1)$$

cualquiera que sea el número natural n.

El primer ejemplo de una proposición P que demostraremos por inducción va a ser, precisamente, la igualdad que da S_1 :

$$P : 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

1) P es cierta para el primer número natural, $n=1$: en este caso, la suma del primer miembro sólo tiene el primer sumando, 1 ; y la expresión del segundo miembro da, para $n=1$,

$$\frac{1\cdot 2}{2} = 1.$$

2) Etapa inductiva : Supongamos que la proposición P es cierta para un número natural cualquiera, n :

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Tenemos que probar que también lo es para el siguiente, $n+1$:

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Para ello, sustituyamos la suma de los n primeros sumandos por el valor que estamos suponiendo cierto : tendremos que probar que

$$\frac{n\,(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)\,(n+2)}{2},$$

lo cual es inmediato en cuanto saquemos en el primer miembro factor común $n+1$ y hagamos operaciones. Esto termina la etapa inductiva y por lo tanto hemos probado la fórmula (1) por inducción.

Planteemos ahora el problema de calcular la suma de los cuadrados de los n primeros números naturales

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2,$$

la suma de los cubos

$$S_3\,(n) = 1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3,$$

o, en general, la suma de las potencias de exponente k :

$$S_k\,(n) = 1^k + 2^k + \cdots + (n-1)^k + n^k.$$

El primer problema que tenemos es *conjeturar* cuanto valdrán ; después llegará el momento de *probar* que nuestra conjetura es cierta.

A la búsqueda de una pista, formemos una tabla con los primeros valores de S_1, S_2 y S_3 :

n	1	2	3	4	5	6
S_1	1	3	6	10	15	21
S_2	1	5	14	30	55	91
S_3	1	9	36	100	225	441

La relación entre S_1 y S_3 parece clara : la conjetura natural es

$$1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \qquad (2)$$

y en este caso nos podemos ahorrar la fase primera de la inducción; la tabla demuestra que la proposición (2) es cierta para los seis primeros números naturales.

Con objeto de probar la fase inductiva, suponemos que (2) es verdad para el número natural arbitrario n ; debemos probar que

$$1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2\,(n+2)^2}{4},$$

y sustituyendo los primeros n sumandos del primer miembro por el segundo miembro de (2), debemos demostrar que

$$\begin{aligned}\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3 &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \Longleftrightarrow \\ (n+1)^2\left[\frac{n^2}{4}+n+1\right] &= \frac{(n+1)^2\left(n^2+4n+4\right)}{4}=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4},\end{aligned}$$

con lo que hemos terminado la fase inductiva y, por tanto, demostrado por inducción la validez de la fórmula (2).

La situación para S_2 es más difícil. No parece sencillo conjeturar la forma general cerrada del segundo miembro de la suma $S_2(n)$ a partir de los valores iniciales del cuadro (ni tampoco si tuviéramos algunos más).

¿Cómo estarán relacionadas S_1 y S_2? Añadamos a la tabla una nueva fila, que dé los valores de S_2/S_1.

n	1	2	3	4	5	6
S_2/S_1	$\frac{3}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{9}{3}$	$\frac{11}{3}$	$\frac{13}{3}$

¡Ahora sí podemos conjeturar! Parece que

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{2n+1}{3},$$

lo cual nos lleva a la hipótesis de que

$$S_2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

que confirmaremos por el método de inducción, ahora sin dificultades dignas de mención...

Pascal, naturalmente, tenía un método propio para llegar a este resultado :
Pongamos

$$(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1,$$

o, en forma equivalente

$$(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1,$$

que sabemos es válida para cualquier número natural n.
Escribamos las n igualdades que resultan de ésta, desde $n=1$ hasta n :

$$\begin{aligned}2^3-1^3 &= 3\cdot 1^2+3\cdot 1+1 \\ 3^3-2^3 &= 3\cdot 2^2+3\cdot 2+1 \\ &\ \ \cdots \\ n^3-(n-1)^3 &= 3\cdot(n-1)^2+3\cdot(n-1)+1 \\ (n+1)^3-n^3 &= 3n^2+3n+1\end{aligned}$$

Cuando sumemos miembro a miembro, la suma de los primeros miembros es una suma *telescópica*, cuyo valor se reduce a

$$(n+1)^3 - 1^3;$$

sumando las tres columnas de los segundos miembros se obtiene, evidentemente

$$3S_2 + 3S_1 + n,$$

con lo cual obtenemos

$$S_2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6},$$

como antes.

Este método de Pascal es el que emplearemos para encontrar un modo de calcular S_k ; para eso escribimos

$$(n+1)^{k+1} - n^{k+1} = \binom{k+1}{1} n^k + \binom{k+1}{2} n^{k-1} + \cdots + 1$$

y escribimos esta igualdad desde $n = 1$ hasta n :

$$\begin{aligned}
2^{k+1} - 1^{k+1} &= (k+1)\,1^k + \binom{k+1}{2} 1^{k-1} + \cdots + 1 \\
3^{k+1} - 2^{k+1} &= (k+1)\,2^k + \binom{k+1}{2} 2^{k-1} + \cdots + 1 \\
4^{k+1} - 3^{k+1} &= (k+1)\,3^k + \binom{k+1}{2} 3^{k-1} + \cdots + 1 \\
&\cdots \\
(n+1)^{k+1} - n^{k+1} &= (k+1)\,n^k + \binom{k+1}{2} n^{k-1} + \cdots + 1
\end{aligned}$$

así que, sumando miembro a miembro, obtendremos la *fórmula recurrente*

$$(n+1)^{k+1} - 1 = (k+1)\,S_k + \binom{k+1}{2} S_{k-1} + \cdots + n,$$

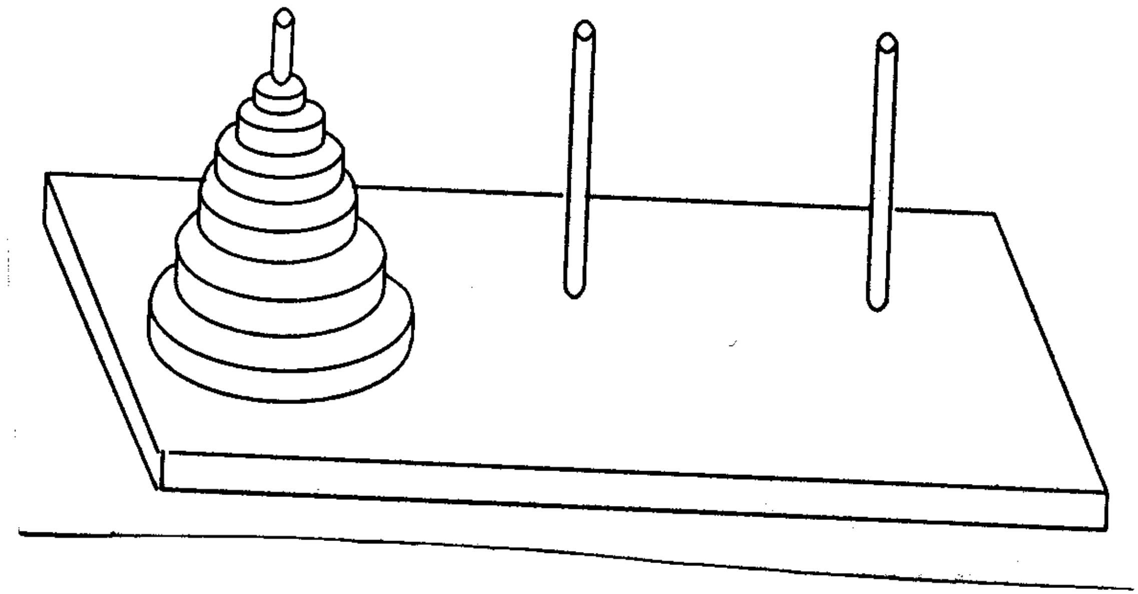
de la que es posible despejar S_k suponiendo conocidas $S_{k-1}, \cdots, S_2, S_1$.

Esta es una fórmula recurrente. Veamos otro ejemplo donde es posible combinar la recurrencia y la inducción.

La Torre de Hanoi

La Torre de Hanoi es un juego que se atribuye a Edouard Lucas.

Tenemos tres estacas, en una de las cuales hay un cierto número de discos de diferentes radios, agujereados en el centro para poderlos insertar en las estacas.



Los discos, como se ve en la figura, están dispuestos de modo que cada disco descansa en uno de radio mayor. Se trata de mover todos los discos a otra de las estacas, cumpliendo las siguientes reglas:

a) Sólo se puede mover un disco de cada vez

b) Cada disco debe situarse sobre un disco de radio mayor

¿Cuántos movimientos son necesarios para trasladar la pila de discos de una estaca a otra?

Los primeros valores se pueden calcular fácilmente, llamando n al número de discos :

n	*Número* de movimientos
1	1
2	3
3	7
4	15

Si observamos que los términos de la sucesión $1, 3, 7, 15, \cdots$ verifican la relación de recurrencia

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 1, \qquad a_1 = 1$$

podremos calcular el número de movimientos para cada valor de n.

Si observamos que los números de la segunda columna de la tabla se obtienen restando 1 a las potencias de 2, conjeturamos que

$$a_n = 2^n - 1.$$

Probaremos esta conjetura por inducción. Las etapas iniciales han sido ya comprobadas utilizando la tabla.

Supongamos que la pila inicial tiene $n = k + 1$ discos. Por la hipótesis de inducción, sabemos que podemos mover la pila formada por los k discos (todos, salvo el de radio más grande) a la tercera estaca utilizando $2^k - 1$ movimientos. Hecho esto, movemos el disco de radio mayor a la segunda estaca (1 movimiento), y finalmente, movemos la pila de k discos de la tercera estaca a la segunda, usando $2^k - 1$ movimientos (de nuevo por la hipótesis de inducción). Luego en total hemos utilizado

$$\left(2^k - 1\right) + 1 + \left(2^k - 1\right) = 2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$$

movimientos, y hemos terminado la demostración por inducción.

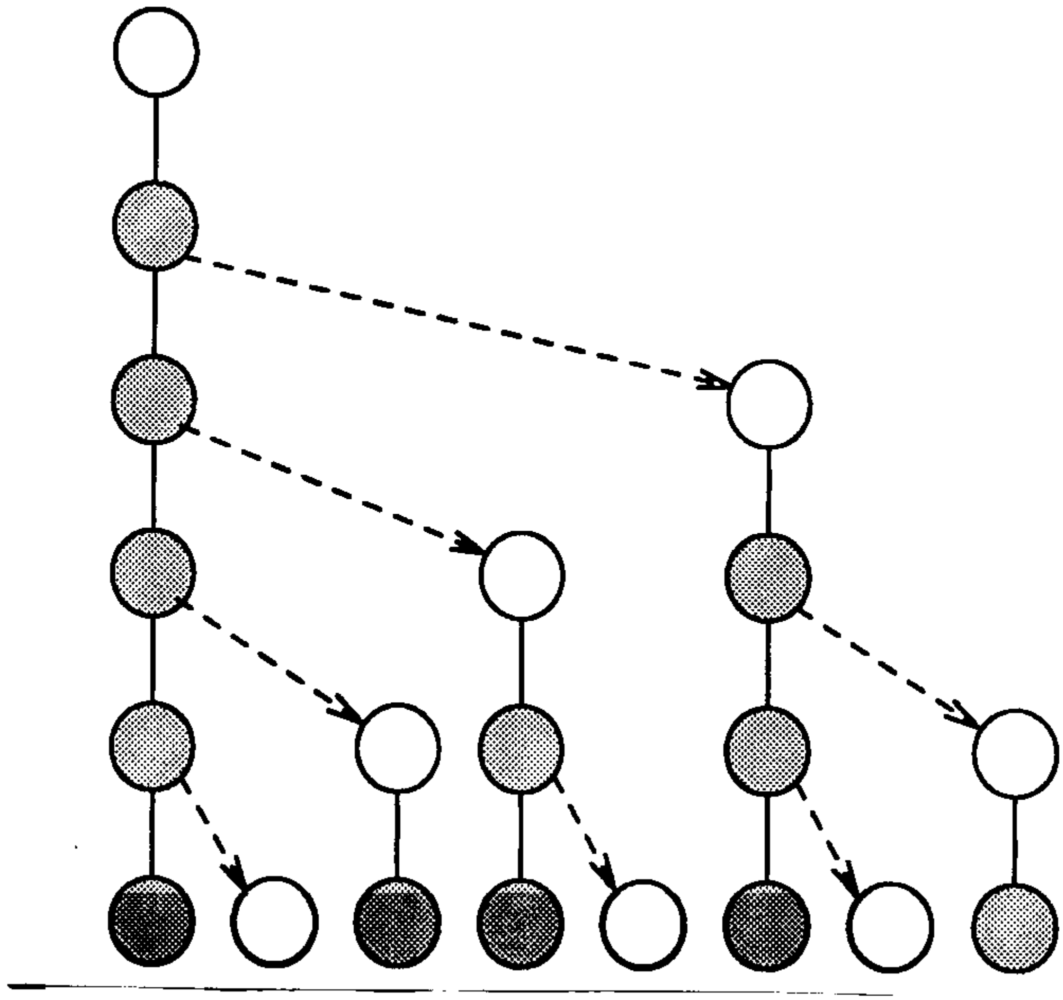
El número de movimientos necesario no puede disminuir : para mover el disco de radio mayor a la segunda estaca es necesario antes mover todos los demás a la tercera.

Los números de Fibonacci

En 1202 Leonardo de Pisa, llamado Fibonacci, publicó en Pisa el *Liber Abaci,* una notable recopilación de problemas, donde está incluído éste, relacionado con la reproducción de los conejos.

Supongamos que tenemos una pareja de conejos (macho y hembra), que están en el primer mes desde su nacimiento y son inmaduros ; tardan un mes en ser maduros y poder reproducirse. Pero a partir del momento en que son maduros, dan nacimiento cada mes a una pareja de conejos (macho y hembra), con los que se repite la situación. ¿Cuántas parejas de conejos habrá al cabo de doce meses?

En la figura siguiente, la pareja de conejos inmaduros se representa por un círculo blanco, y la de maduros por uno gris. Así se tienen las primeras generaciones de conejos :



Contando los círculos, obtenemos la sucesión numérica

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \cdots$$

que recibe el nombre de sucesión de Fibonacci y se representa por

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_4 = 8, \cdots$$

donde cada término es igual a la suma de los dos anteriores :

$$F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$$

Con esto estamos en condiciones de calcular F_{12}, que es lo que preguntaba el problema de Fibonacci. Por ahora no nos plantearemos la obtención de una fórmula "cerrada" para F_n en función de n.

Veamos algunas otras propiedades de los números de Fibonacci.

Examinemos el producto de F_n y F_{n+1} para los primeros valores de n :

n	$F_{n-1}F_{n+1}$
2	$1 \times 2 = 2$
3	$1 \times 3 = 3$
4	$2 \times 5 = 10$
5	$3 \times 8 = 24$
6	$5 \times 13 = 65$
7	$8 \times 21 = 168$
8	$13 \times 34 = 442$
9	$21 \times 55 = 1155$
10	$34 \times 89 = 3026$

A primera vista no parece haber ninguna regularidad aquí. Pero fijándonos algo más, observamos que algunos valores de la tabla están próximos a cuadrados de números enteros: 24 y $25 = 5^2, 65$ y $64 = 8^2$,

168 y $169 = 13^2$. ¡Pero 5, 8 y 13 son términos de la sucesión de Fibonacci! Calculando algo más, $21^2 = 441, 34^2 = 1156$.

Entonces formamos una nueva tabla :

n	$F_{n-1}F_{n+1}$	F_n^2	$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2$
2	$1 \times 2 = 2$	1	$+1$
3	$1 \times 3 = 3$	4	-1
4	$2 \times 5 = 10$	9	$+1$
5	$3 \times 8 = 24$	25	-1
6	$5 \times 13 = 65$	64	$+1$
7	$8 \times 21 = 168$	169	-1
8	$13 \times 34 = 442$	441	$+1$
9	$21 \times 55 = 1155$	1156	-1
10	$34 \times 89 = 3026$	3025	$+1$

Por lo tanto, la conjetura es

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

cuya validez para los primeros valores de n (desde $n = 2$) está justificada por la tabla. Supongamos que

$$F_{k-1}F_{k+1} - F_k^2 = (-1)^k$$

y veamos cómo se puede demostrar que

$$F_kF_{k+2} - F_{k+1}^2 = (-1)^{k+1}\,.$$

Aunque no sea obvio por qué se eligen las sustituciones que siguen, el fin último se alcanza:

$$\begin{aligned}
F_k F_{k+2} - F_{k+1}^2 &= F_k\left(F_{k+1}+F_k\right) - F_{k+1}\left(F_k + F_{k-1}\right)\\
&= F_k F_{k+1} + F_k^2 - F_{k+1}F_k - F_{k+1}F_{k-1}\\
&= F_k^2 - F_{k-1}F_{k+1}\\
&= (-1)(F_{k-1}F_{k+1} - F_k^2)\\
&= (-1)(-1)^k\\
&= (-1)^{k+1}.
\end{aligned}$$

Una desigualdad demostrada por inducción
Nos proponemos demostrar que

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n}$$

Vamos a hacerlo por inducción. Para $n=1$ la desigualdad dice

$$1 \leq 2\sqrt{1} = 2, \text{ que es verdad.}$$

Supongamos que

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{k};$$

necesitamos demostrar que

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq 2\sqrt{k+1},$$

y para eso deberíamos probar que

$$2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq 2\sqrt{k+1}.$$

Multiplicando los dos miembros por $\sqrt{k+1}$ y elevando al cuadrado obtenemos

$$\begin{aligned}
4k\,(k+1)+4\sqrt{k\,(k+1)} &\leq 4\left(k^2+2k+1\right)\\
4\sqrt{k\,(k+1)} &\leq 4k+3
\end{aligned}$$

y volviendo a elevar al cuadrado,

$$16k^2+16k \leq 16k^2+24k+1,$$

que obviamente es cierta, y hemos terminado.