FAMOSOS PROBLEMAS DE LA I.M.O. (1)

Francisco Bellot Rosado

En la Olimpiada Internacional de 1977, celebrada en Belgrado, VietNam propuso el siguiente problema:

Una sucesión finita de números reales es tal que la suma de 7 términos consecutivos cualesquiera es negativa, y la suma de 11 términos consecutivos cualesquiera es positiva.

¿Cuál es el mayor número de términos que puede tener tal sucesión?

Este es un ejemplo de lo que Arthur Engel llamaría "un buen problema para un concurso", es decir, un problema frente al cual un profesor experto no tiene, necesariamente, ventaja frente a un alumno. El problema fue elegido por el Jurado Internacional y fue propuesto con el número 2.

Indicaciones para la solución

Comencemos formando un cuadro con términos de la sucesión:

$$\begin{array}{ccccccc}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\
a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17}
\end{array}$$

Si nos fijamos en las filas de este cuadro, observamos que están formadas por 7 términos consecutivos de la sucesión, asi que las sumas de los números por filas son negativas; por su parte, las columnas del cuadro están formadas por 11 términos consecutivos de la sucesión y por lo tanto sus sumas son positivas. Pero esta situación es claramente absurda: la suma de todos los números del cuadro no puede ser negativa si los sumamos por filas y negativa si los sumamos por columnas.

Por consiguiente, es imposible que la sucesión llegue a tener 17 términos.

Ya que el número máximo de términos de la sucesión no puede ser 17, veamos cómo encontrar una sucesión, en las condiciones del problema, que esté formada por 16 términos.

Para ello le impondremos a la sucesión dos condiciones suplementarias, que no aparecen en el enunciado del problema:

Buscaremos una sucesión que sea capicúa, es decir, se lea igual de derecha a izquierda que de izquierda a derecha;

y que además, sea tal que la suma de los 7 términos consecutivos cualesquiera valga -1 y la suma de los 11 términos consecutivos cualesquiera valga +1.

Cuando estas dos condiciones suplementarias se aplican a la sucesión que buscamos, encontramos que se reduce drásticamente el número de términos distintos que puede tener la sucesión, y un sistema de dos ecuaciones en dos incógnitas conduce a la solución

$$5,5,-13,5,5,5,-13,5,5,-13,5,5,5,-13,5,5$$

con lo que la solución del problema se completa.

En el libro rumano de Ion Cuculescu, *Olimpiadele Internationale de Matematica ale elevilor, Editura tehnica, Bucarest 1984[1],* se pueden encontrar varias soluciones y generalizaciones, halladas por los concursantes. El procedimiento esbozado para calcular el ejemplo figura desarrollado en el libro de Samuel Greitzer, *International Mathematical Olympiads 1959-1977[2]*, publicado por la Mathematical Association of America en 1978. Allí señala Greitzer que va a indicar un procedimiento *distinto de la simple adivinación* para encontrar el ejemplo de sucesión que cumpla las condiciones del problema.

De hecho, tal y como indica Arthur Engel en un artículo sobre el entrenamiento de Alemania Federal para la IMO, publicado en la revista *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 1988* y que más tarde forma parte de su libro *Problem Solving Strategies, pg.85 y siguientes, (Springer 1998)[3],* este problema nunca debió ser aceptado por el Jurado, porque con una formulación parecida había sido propuesto en la Olimpiada de Moscú de 1969 (Engel cita una fuente rusa del año 1971, con 200000 ejemplares vendidos; yo lo he localizado en el libro – en ruso – *Moscovskiie matematicheskie Olimpiadii,* de G.A. Galperin y A. K. Tolpygo, 1986)[4]. Pero el hecho es que el problema se propuso en la I.M.O., y hay abundante bibliografía sobre él. En este artículo ofrezco a los lectores de la REOIM una selección de sus soluciones, con atribución de autoría siempre que es posible.

Solución de John Rickard, participante por Gran Bretaña, galardonada con Premio Especial del Jurado.(Ver [5])

Si en el enunciado, 7 y 11 se reemplazan por los enteros positivos m,n entonces el máximo número de términos es m + n –(m,n) – 1, donde (m,n) es el máximo común divisor de m y n.

Sea $a_k, k=1,2,\cdots,l$ una sucesión de números reales. Definimos la sucesión $s_k, k=0,1,2,\cdots,l$ de la manera siguiente:

$$s_0 = 0; s_k = \sum_{i=1}^{k} a_i, k=1,2,\cdots,l .$$

Las condiciones del problema son equivalentes a

$$s_k > s_{k+m}, k=0,1,2,\cdots,l-m; s_k < s_{k+n}, k=0,1,2,\cdots,l-n \ * \ .$$

Sea *d* el máximo común divisor de *m* y *n.* Entonces $m=m'd; n=n'd$, y ahora *m′* y *n′* son primos entre sí.

Supongamos que existiera una sucesión a_k de longitud $l=m+n-d$ (o más larga) verificando las condiciones del problema. Entonces consideramos los números $s_0, s_d, \cdots, s_{m'+n'-1\ d}$. Son en total $m'+n'$ números, que satisfacen n' desigualdades $s_{k+m} < s_k$ y m' desigualdades $s_k < s_{k+n}$. Además, cada término s_{kd} aparece dos veces en esas desigualdades, una vez en el primer miembro y una vez en el segundo: esto significa que podemos formar una cadena circular

$$s_{i_1} < s_{i_2} < \cdots < s_{i_k} < s_{i_1}$$

lo cual es una contradicción.

Supongamos ahora que no existiera una sucesión de longitud $m+n- \ m,n \ -1$ que satisface las condiciones requeridas. Si (*) no tiene solución, entonces existe una cadena de desigualdades como antes. Los índices de los términos de esa cadena deben ser todos congruentes dos a dos, módulo d. Hay $m'+n'-1$ posibles índices en cada clase de restos, así que a lo sumo hay $m'+n'-1$ términos en la cadena circular. La diferencia de índices de dos términos consecutivos en la cadena es n ó bien $-m$. Supongamos que q de ellos son iguales a n y r de ellos iguales a $-m$. Entonces $qn-rm=0$, así que $qn'=rm'$. Como m' y n' son primos entre sí, q es divisible por m' y r es divisible por n'. Se sigue de ahí que $q+r\geq m'+n'$, luego al menos hay $m'+n'$ términos en la cadena circular, lo cual es una contradicción.

Solución de István Reiman *(International Mathematical Olympiad 1959-1999, Anthem Press, 2001[6])*

La ventaja de esta solución es que permite construir infinitos ejemplos con el máximo número de términos.

Sea s_i la suma de los i primeros elementos, con $s_0=0$. Las condiciones del problema dicen que

$$s_{i+7}-s_i<0 \Leftrightarrow s_i>s_{i+7}, i=0,1,2,\cdots \ 1$$

Y

$$s_i-s_{i-11}>0 \Leftrightarrow s_i>s_{i-11}, i=11,12,\cdots(2)$$

Si la sucesión tuviera 17 elementos, iterando ls dos desigualdades obtenemos

$$s_7>s_{14}>s_3>s_{10}>s_{17}>s_6>s_{13}>s_2>s_{16} \qquad (3)$$

$$>s_5>s_{12}>s_1>s_8>s_{15}>s_4>s_{11}>s_0=0,$$

y esto es una contradicción, porque $s_7<0$.

Supongamos ahora que la sucesión sólo tiene 16 términos y empezamos la cadena en s_6, y continuamos desde s_0 como sigue:

$$s_0>s_7>s_{14}>s_3>s_{10} \qquad (4)$$

Ahora la cadena se interrumpe porque ni (1) ni (2) se aplica.Daremos valores arbitrarios a los s valores de s_i que verifican (3) y (4), es decir 12>11>10>… y construimos la tabla

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_{11}	S_{12}	S_{13}	S_{14}	S_{15}	S_{16}
5	10	-3	2	7	12	-1	4	9	-4	1	6	11	-2	3	8

Ya que $a_i = s_i - s_{i-1}$, la tabla proporciona

5,5,-13,5,5,5,-13,5,5,-13,5,5,5,-13,5,5

Como tenemos infinitas elecciones para los s valores de s_i, podemos construir infinitas sucesiones de 16 términos en las condiciones del problema.

El Prof. Mircea Becheanu, en su libro "International Mathematical Olympiads 1959-2000 (Academic Distribution Center, 2001)[7] incluye dos demostraciones basadas en consideraciones de Álgebra Lineal: en definitiva se trata de demostrar la existencia de una solución para un sistema de 16 ecuaciones con 16 incógnitas.

Solución de Mircea Becheanu (Univ. de Bucarest, Rumania)

Se trata de encontrar los números reales

$$x_1, x_2, \cdots, x_{16}$$

que deben cumplir las condiciones

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_7 = a_1$$

$$x_2 + x_3 + \cdots + x_8 = a_2$$

…………….

$$x_{10} + x_{11} + \cdots + x_{16} = a_{10}$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{11} = b_1$$

$$x_2 + x_3 + \cdots + x_{12} = b_2$$

…………….

$$x_6 + x_7 + \cdots + x_{16} = b_6,$$

donde $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$ son ciertos números negativos y $b_1, b_2, \cdots, b_6$ positivos.

La matriz del sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

y observándola cuidadosamente se observa que su determinante es la resultante de los polinomios

$$\phi_7 \quad X \quad = X^6 + X^5 + \cdots + X + 1 \text{ y } \phi_{11} \quad X \quad = X^{10} + X^9 + \cdots + X + 1.$$

Estos dos son polinomios ciclotómicos para la división de la circunferencia en 7 y 11 arcos iguales, respectivamente. No tienen raíces comunes y por lo tanto el determinante de la matriz es distinto de cero y el sistema tiene solución única.

También se puede probar esto *por métodos elementales:* es suficiente demostrar que el correspondiente sistema homogéneo sólo tiene la solución trivial

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{16} = 0 .$$

Sea $x_1, x_2, \cdots, x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{16}$ una sucesión en la cual cualquier sucesión de 7 términos consecutivos y cualquier sucesión de 11 términos consecutivos tenga suma 0. Si se consideran sucesivamente sumas de 7 términos consecutivos en cada suma de 11 términos consecutivos, se ve que cualquier suma de 4 términos consecutivos es 0. Por ejemplo,

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{11} = 0, x_5 + x_6 + \cdots + x_{11} = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

Luego de aquí deducimos que cualquier suma de 8 términos consecutivos es 0. Usando de nuevo sumas de 7 términos consecutivos obtenemos que cada término es 0, lo que termina la demostración.

Solución de Peter Winkler

En el libro *Mathematical Puzzles (A Connoisseur's Collection),* de Peter Winkler, *A.K.Peters 2004[8]* se incluye una variante de este problema, con una solución por inducción. La variante consiste en la siguiente conversación entre la Comisión Ejecutiva (C.E.) y un accionista (A), en la Asamblea general de una sociedad de inversiones:

C.E.:"Observen que hemos tenido ganancias en cada período de 8 meses consecutivos, desde nuestra última Asamblea"

A.:"Puede ser, pero yo también veo que hemos perdido dinero en cada período de 5 meses consecutivos"

¿Cuál es el máximo número de meses transcurridos desde la última Asamblea?

Transcribo la solución de Winkler, para finalizar este recorrido por las soluciones del problema.

Winkler toma el problema de forma general: la cuestión es llamar $f\ x,y$ a la longitud de la sucesión más larga tal que toda subsucesión de x elementos tenga suma positiva y toda subsucesión de y elementos tenga suma negativa; se puede suponer $x>y$.

Si *x* es un múltiplo de y, entonces $f\ x,y\ = x-1$.

¿Qué sucede si $y=2$, con x impar? Entonces se podría tener una sucesión de longitud x, con elementos que se alternan entre, digamos $x-1$ y $-x$. Pero no puede haber $x+1$números, porque en cada subsucesión de longitud $x$los elementos impares tienen que ser positivos (ya que se pueden cubrir con subsucesiones de longitud 2 dejando fuera cualquier elemento impar). Pero hay ahí dos subsucesiones de longitud x, y conjuntamente implican que los dos números centrales son positivos, una contradicción.

Aplicando este razonamiento más generalmente, se puede conjeturar que $f(x,y)\leq x+y-2$ cuando x e $y$son primos entre sí. Podemos probar esto por inducción, como sigue.

Supongamos, por el contrario, que tenemos una sucesión de longitud $x+y-1$ que satisface las condiciones. Escribimos $x=ay+b$, con $0<b<y$, y nos fijamos en los últimos $y+b-1$ números de la sucesión. Obsérvese que cualesquiera b consecutivos de ellos pueden expresarse como una subsucesión de longitud x, de la sucesión entera, con a subsucesiones de longitud y eliminadas. Por lo tanto tiene suma positiva. Por otra parte, cualquier subsucesión de longitud $y-b$, de los últimos $y+b-1$, se puede expresar como $a+1$ sucesiones de longitud y con una sucesión de longitud x eliminada, así que tiene suma negativa. Se sigue de aquí que $f(b,y-b)\geq y+b-1$, lo que contradice nuestra hipótesis de inducción porque b e $y-b$ son primos entre sí.

Para demostrar que $f(x,y)$ es efectivamente igual a $x+y-2$, cuando x e y son primos entre sí, construiremos una sucesión que tenga las propiedades requeridas, y algo más: que tome solamente dos valores distintos, y sea periódica con los dos períodos x,y. Llamaremos u,v a los dos valores, e imaginemos que los asignamos arbitrariamente a los y primeros elementos de nuestra sucesión.

Esas asignaciones las repetiremos hasta el final de la sucesión, haciéndola, por fuerza, periódica en y. Para que sea periódica en x también, sólo necesitamos asegurarnos de que los últimos $y-2$ elementos se emparejen con los primeros $y-2$, lo que lleva a satisfacer $y-2$ igualdades de entre las y elecciones originales que hicimos. Ya que no son suficientes igualdades para forzar que todas las elecciones sean la misma, podemos asegurar que hay al menos un u y un v.

Hagamos esto, por ejemplo, con $x=8$, $y=5$. Llamamos $c_1,\cdots,c_5$ alos primeros cinco elementos de la sucesión, de modo que ésta es

$$c_1c_2c_3c_4c_5c_1c_2c_3c_4c_5c_1.$$

Para que sea periódica con período 8, debe ser $c_4=c_1,c_5=c_2,c_1=c_3$. Esto nos permite poner $c_1=c_3=c_4=u;c_2=c_5=v$, con lo que la sucesión es

$$uvuuvuvuuvu.$$

Volviendo a x, y en general, se observa que una sucesión que es periódica en x automáticamente tiene la propiedad de que toda subsucesión de longitud x tiene suma constante; porque como se desplaza la subsucesión un lugar de cada vez, el elemento cogido en un extremo es igual que el dejado en el otro. Obviamente, lo mismo ocurre con las subsucesiones de longitud y si la sucesión tiene período y.

Sea S_x la suma de la subsucesión de longitud x, y análogamente S_y. Afirmamos que $S_x/x \neq S_y/y$. La razón es que si hubiera, digamos, p términos iguales a u en cada subsucesión de longitud x, y q términos iguales a v en cada subsucesión de longitud y, entonces $S_x/x = S_y/y$ implicaría que $y\ pu+\ x-p\ v\ =x\ qu+\ y-q\ v$ lo que se simplifica para dar $yp=xq$. Ya que x e y son primos entre sí, esto no puede ocurrir para $0<p<x;0<y<q$.

De aquí resulta que podemos ajustar u y v para que S_x sea positiva y S_y negativa. En el caso anterior, cada subsucesión de longitud 8 contiene 5 veces u y 3 veces v; mientras que cada subsucesión de longitud 5 contiene 3 veces u y 2 veces v. Si tomamos $u=5$ y $v=-8$, resultan $S_x=1$, $S_y=-1$. La sucesión final resulta ser

5, -8, 5, 5, -8, 5, -8, 5,5,-8,5.

El argumento precedente se generaliza al caso en que x, y tienen un máximo común divisor (x, y), distinto de 1. El resultado es

$$f(x,y)=x+y-1-\ x,y\ .$$

Bibliografía

[1] Cuculescu, I. *Olimpiadele Internationale de matematica ale elevilor. Editura Tehnica, Bucarest, 1984* (en rumano).

[2] Greitzer, S.L. *International Mathematical Olympiads 1959-1977. Mathematical Association of America, 1978.*

[3] Engel, A. *Problem-Solving Strategies, Springer 1998.*

[4] Galperin, G.A. & Tolpygo,A.K. *Moskovskiie Matematicheskiie Olimpiadii (en ruso), Prosvescheniie, 1986*

[5] Jankovic, V. & Micic, V. *IX & XIX International Mathematical Olympiads, Mathematician Society of Serbia, 1997.*

[6] Reiman, I*. International Mathematical Olympiad 1959 – 2000***.** *Anthem Press, 2001.*

[7] Becheanu, M. *International Mathematical Olympiads 1959 – 2000. Academic Distribution Center, 2001.*

[8] Winkler, P. *Mathematical Puzzles (A Connoisseur's Collection), A.K. Peters Ltd., 2004*

Otras referencias donde se pueden encontrar soluciones a este problema

Kontogiannis, D. *Matematikes Olympiades 1 (en griego). (4 soluciones y 3 generalizaciones).Edición privada del autor, 1981.*

Hanjs, Z. *Medunarodne Matematicke Olimpjade (en croata). Zagreb 1997.*

Djukic, D. y otros *: The IMO Compendium (A Collection of problems suggested for the International Mathematical Olympiads, 1959 – 2004. Springer 2006.*

Bourgade, P. *Olympiades internationals de mathématiques 1976 – 2005 (en francés). Cassin, Paris 2005.*