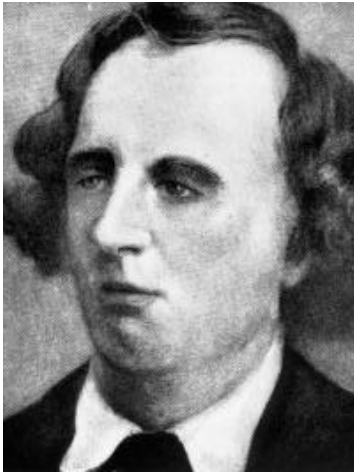


*Capítulo Vigésimosegundo*  
**MAESTRO Y DISCÍPULA**

WEIERSTRASS Y SONJA KOWALEWSKI



Weierstrass



Sonja Kowalewski

*La teoría que ha tenido el máximo desarrollo en los tiempos recientes es, sin duda alguna, la teoría de funciones.*

*Vito Volterra*

Los jóvenes doctores en Matemática que buscan ansiosamente cargos donde su disciplina y talentos puedan desempeñar algún papel, muchas veces se preguntan si es posible para un hombre realizar largo tiempo la enseñanza elemental y mantener viva la llama matemática. La vida de Boole es una respuesta parcial; la carrera de Weierstrass, el príncipe de los analistas, "el padre del Análisis moderno", es concluyente.

Antes de considerar detalladamente la obra de Weierstrass, le situaremos cronológicamente con respecto a aquellos de sus contemporáneos alemanes que, como él, dieron, al menos, un nuevo aspecto al vasto imperio de la Matemática, durante la segunda mitad del siglo XIX y las tres primeras décadas del XX. El año 1855, el año de la muerte de Gauss y de la ruptura del último eslabón con los matemáticos principales del siglo anterior, puede ser tomado como punto de referencia. En 1855 Weierstrass (1815-1897) tenía 40 años; Kronecker (1823-1891) 32; Riemann (1826-1866) 29; Dedekind (1831-1916) 24, mientras Cantor (1845-1918) era un muchachuelo de 10. La Matemática alemana no carecía, pues, de gentes que siguieran la gran tradición de Gauss. Los méritos de Weierstrass estaban siendo reconocidos; Kronecker se había iniciado con fortuna; cierta parte de la gran obra de Riemann había sido ya realizada y Dedekind había penetrado en el campo de la teoría de números, donde había de obtener su máxima fama. Como es natural, Cantor todavía continuaba en la penumbra.

Hemos reunido estos nombres y fechas debido a que cuatro de los hombres mencionados, aunque muy separados en una gran parte de la obra que realizaron, se asocian en uno de los problemas centrales de toda la matemática, el de los números irracionales. Weierstrass y Dedekind recogieron la discusión de los irracionales y de la continuidad prácticamente donde había sido dejada por Eudoxio en el siglo IV a. J. C; Kronecker, un eco moderno de Zenón, amargó los

últimos años de Weierstrass con la escéptica crítica de la revisión de las obras de Eudoxio hecha por aquél; mientras Cantor, siguiendo un nuevo camino, intentaba descubrir el verdadero infinito que está implícito, de acuerdo con algunos, en el concepto de continuidad. De la obra de Weierstrass y Dedekind se desarrolló la época moderna del Análisis, la de la precisión lógica crítica en el Análisis (el Cálculo, la teoría de funciones de variable compleja y la teoría de funciones de variables reales) a diferencia de los métodos intuitivos más laxos de algunos de los antiguos escritores de valor incalculable como guía heurística para el descubrimiento, pero completamente inútiles desde el punto de vista del ideal pitagórico de la demostración matemática. Como ya hemos dicho, Gauss, Abel y Cauchy inauguraron el primer período de rigor. El movimiento iniciado por Weierstrass y Dedekind fue, en un plano superior, adecuado a las mayores exigencias del Análisis en la segunda mitad del siglo, cuando las primitivas precauciones eran insuficientes.

Un descubrimiento de Weierstrass conmovió la escuela intuitiva de analistas que lo consideraron con recelo. Weierstrass había ideado una curva continua que no tiene tangente en ningún punto. Gauss había llamado a la Matemática "la ciencia de los ojos"; era necesario algo más que un buen par de ojos para "ver" la curva que Weierstrass presentó a los abogados de la intuición sensorial. En toda acción se observa una reacción igual y opuesta, y era natural que el excesivo rigor engendrara la correspondiente oposición. Kronecker lo atacó vigorosamente, aunque en forma equivocada y de modo violento. Negó que significase algo. Aunque consiguió ofender al venerable y cordial Weierstrass, causó poca impresión sobre sus conservadores contemporáneos y prácticamente ninguna sobre el Análisis matemático.

Kronecker se hallaba una generación a la cabeza de su tiempo. Fue necesario llegar a la segunda década del siglo XX para que su crítica severa a las doctrinas corrientemente aceptadas de la continuidad y de los números irracionales fueran objeto de una seria consideración. En la actualidad, no todos los matemáticos creen que el ataque de Kronecker fuera hijo de una explosión de envidia despertado por Weierstrass, que algunos de sus contemporáneos consideraban más famoso, y se admite que existe algo de verdad, quizá no mucho, en estas objeciones violentas. De todos modos el ataque de Kronecker fue en parte responsable del tercer período de rigor en el moderno razonamiento matemático, que ahora nosotros conservamos. Weierstrass no fue el único matemático a quien Kronecker criticó; Cantor sufrió también profundamente por lo que él consideraba la persecución maliciosa de su influyente colega. De todos esos hombres nos ocuparemos en el lugar correspondiente; aquí tan sólo intentamos mostrar que sus vidas y obras están ampliamente entrelazadas, al menos en algunas cuestiones fundamentales.

Para completar la descripción, debemos recordar otros puntos de contacto entre Weierstrass, Kronecker y Riemann por una parte, y Kronecker y Dedekind por otra. Abel, recordaremos, murió en 1829, Galois en 1832 y Jacobi en 1851. En la época de que nos estamos ocupando uno de los problemas sobresalientes del Análisis matemático era completar la obra de Abel y Jacobi sobre las funciones periódicas múltiples, funciones elípticas, funciones abelianas (véase capítulos XVII, XVIII). Desde puntos de vista totalmente diferentes, Weierstrass y Riemann cumplieron lo que debía hacerse. Weierstrass, en efecto, se consideró a sí mismo, en cierto grado, como un sucesor de Abel. Kronecker abrió nuevas perspectivas en las funciones elípticas, pero no compitió con los otros dos en el campo de las funciones abelianas. Kronecker fue, en primer término, un aritmético y un algebrista; algunas de sus mejores obras constituyen una elaboración y ampliación de los trabajos de Galois en la teoría de ecuaciones. Por tanto, Galois encontró un digno sucesor no mucho tiempo después de su muerte.

Aparte de sus incursiones en el dominio de la continuidad  $v$  de los números irracionales, la obra más original de Dedekind se refiere a la Aritmética superior, que revolucionó y renovó. En esto Kronecker fue su más capaz y sagaz rival, pero, por lo demás, la forma de enfocar los problemas fue completamente diferente y característica de los dos hombres. Dedekind venció sus dificultades en la teoría de números algebraicos refugiándose en el infinito (en su teoría de "ideales" según se dirá en el lugar adecuado); Kronecker intentó resolver sus problemas en el infinito.

Karl Wilhelm Theodor Weierstrass, el hijo mayor de Wilhelm Weierstrass (1790-1869) y de su mujer Theodora Forst, nació el 31 de octubre de 1815, en Ostenfelde, en el distrito de Münster, Alemania. El padre era entonces oficial de aduanas al servicio de Francia. Recordaremos que era el año 1815, el año de Waterloo, y los franceses dominaban aún en Europa. Ese año también fue el del nacimiento de Bismarck, y es interesante observar que mientras la obra de los hombres de Estado más famosos se derrumbó en la primera guerra mundial, si es que no se había derrumbado antes, las contribuciones de sus contemporáneos, relativamente oscuros, a la ciencia y al progreso de la civilización en general, son hoy todavía más estimadas que lo fueron durante su vida.

La familia Weierstrass estaba formada por devotos católicos liberales. El padre se había convertido desde el protestantismo, probablemente en la época de su matrimonio. Karl tuvo un hermano, Peter (que murió en 1904), y dos hermanas (Klara (1823-1896) y Elise (1826 - 1898). La madre murió en 1826, poco después del nacimiento de Elisel y el padre volvió a casarse al año siguiente. Poco se sabe acerca de la madre de Karl, aunque se dice que tuvo por su marido cierta antipatía y que nunca vio su matrimonio con buenos ojos. La madrastra era una típica ama de casa alemana; su influencia sobre el desarrollo intelectual de su hijastro, probablemente fue nula. El padre, en cambio, era un idealista práctico, y un hombre de cultura que en cierta época había sido maestro. Los últimos diez años de su vida transcurrieron pacíficamente en Berlín, en la paz de la casa de su famoso hijo, donde vivían también las dos hijas. Ninguno de los hijos se casó, y aunque el pobre Peter mostró una vez inclinación hacia el matrimonio, prontamente fue desviado de ese camino por su padre y hermanas.

Una posible causa de discordia en la sociabilidad natural de los hijos debió ser el rigor, la dominante autoridad y la testarudez prusiana del padre. Había casi arruinado la vida de Peter con sus constantes prédicas, y estuvo a punto de hacer lo mismo con Karl a quien deseaba dirigir hacia una carrera para la que no tenía aptitudes, sin darse cuenta de cuál era la capacidad de su brillante hijo. El viejo Weierstrass tuvo la audacia de sermonear a su hijo y de mezclarse en sus asuntos hasta cuando "el muchacho" iba a cumplir los 40 años. Por fortuna, Karl estaba constituido de un material resistente. Como veremos, su lucha contra el padre, aunque él mismo probablemente no se daba cuenta de que combatía al tirano, tomó la forma no desusada de poner obstáculos a la forma de vida que su padre había elegido para él. Era la mejor defensa que podía idear, y lo más notable es que ni el hijo ni el padre llegaron a comprender lo que ocurría, aunque una carta de Karl, cuando tenía 60 años, muestra que al fin se dio cuenta de la causa de sus primeras dificultades. Karl recorrió su camino, pero fue un camino largo y tortuoso, sembrado de ensayos y errores. Sólo un hombre como él, de cuerpo y mente poderosa, podía alcanzar el objetivo soñado.

Poco después del nacimiento de Karl, la familia se trasladó a Westernkotten, Westfalia, donde el padre desempeñaba un cargo en las salinas. Westernkotten, como otros tristes rincones donde transcurrieron los mejores años de la vida de Weierstrass, sólo se conoce hoy en Alemania por el hecho de que Weierstrass había sido condenado a enmohecerse allí, aunque no llegó a enmohecerse. Su primer trabajo está fechado el año 1841, (a la edad de 26 años) en Westernkotten. No habiendo escuela en la aldea, Karl fue enviado a la cercana ciudad de

Münster, y luego, a los 14 años, ingresó en el Instituto Católico de Paderborn. Como Descartes en condiciones algo similares, Weierstrass sacó jugo de su escuela, y contrajo amistad con los buenos maestros. Cumplió sus tareas en un tiempo mucho menor que el normal, y todos sus estudios registran un comportamiento uniformemente brillante. Abandonó el Instituto en 1834, teniendo 19 años. Obtuvo premios con inquebrantable regularidad, y un año consiguió siete. De ordinario ocupó el primer puesto en alemán y en dos de las tres materias latín, griego y Matemática. Por una ironía del destino jamás obtuvo un premio en caligrafía, aunque estaba dedicado a enseñar escritura a los muchachuelos que se habían emancipado recientemente de los lazos maternos.

Como los matemáticos suelen gozar de la música, es interesante observar que Weierstrass, tosco como era, no podía tolerar la música en ninguna forma. Nada significaba para él, y tampoco pretendía que tuviera alguna significación. Cuando sus solícitas hermanas intentaban que tomara lecciones de música para hacerle más sociable, solía abandonar el proyecto después de una o dos lecciones mal aprendidas de memoria. Los conciertos le aburrían, y las óperas le provocaban el sueño cuando era arrastrado a alguno de esos espectáculos.

Como su buen padre, Karl no sólo era un idealista, sino también extraordinariamente práctico. Además de obtener la mayor parte de los premios en los estudios que no tenían aplicaciones prácticas, se aseguró una ocupación retribuida cuando tenía 15 años, sirviendo de tenedor de libros en un próspero comercio de jamón y manteca.

Todos estos triunfos iban a tener un efecto desastroso sobre el futuro de Karl. El viejo Weierstrass, como muchos padres, dedujo una errónea conclusión de los triunfos de su hijo. Razonaba, si es que se puede llamar razonar, del siguiente modo. El muchacho había logrado una carretada de premios, por tanto, debía tener talento; lograba ganar dinero desempeñando un cargo en el negocio de un honorable comerciante en manteca y jamón, por tanto debería ser un brillante tenedor de libros. Ahora bien ¿cuál es el ideal de todo tenedor de libros? Sin duda alguna un alto puesto del gobierno en el servicio civil prusiano. Pero para lograr esta elevada posición era deseable un conocimiento de las leyes, así le sería posible triunfar y no caería derrotado.

Como una consecuencia de toda su lógica el pater-familias Weierstrass metió de cabeza a su inteligente hijo, cuando tenía 19 años, en la Universidad de Bonn, para que dominara todas las trapacerías del comercio y todas las sutilezas de las leyes.

Karl no tenía inclinación alguna para esas dos actividades. Dedicó la fortaleza de su cuerpo, su extraordinaria destreza y su aguda inteligencia casi exclusivamente a la esgrima y a la dulce sociabilidad que proporciona el nocturno y liberal consumo de la excelente cerveza alemana. Para hacer lo que Weierstrass hizo y seguir adelante, hay que tener al menos una décima parte de su fortaleza y no menos de una milésima parte de su talento.

Weierstrass fue invencible en Bonn. Su ojo rápido, su largo brazo, una exactitud demoníaca y su terrible velocidad en la esgrima hicieron de él un contrincante admirable, y se afirma que jamás fue tocado. Ninguna cicatriz adornaba su mejilla y en ninguno de sus duelos llegó a verter una gota de sangre. No está definitivamente establecido si después de algunas de las celebraciones de sus numerosas victorias quedó o no debajo de la mesa. Sus discretos biógrafos son algo reservados acerca de este importante punto, pero quien haya contemplado alguna vez alguna de las obras maestras matemáticas de Weierstrass le parecerá inconcebible que una cabeza tan fuerte como la suya haya podido inclinarse ante un jarro de medio litro. Al fin y al cabo, sus cuatro años de Universidad quizá fueron bien empleados.

Sus experiencias en Bonn tuvieron tres consecuencias de gran interés para Weierstrass: le curaron de la fijación al padre, sin que en modo alguno quedara dañado su afecto por su desilusionado progenitor; le hicieron un ser humano capaz de sentir las esperanzas y aspiraciones de los seres

humanos menos dotados que él, sus discípulos, y así contribuyó directamente a su triunfo, que le señala como el maestro matemático probablemente más grande de todas las épocas, y, finalmente, la genialidad humorística de su pubertad constituyó ya para él un hábito de vida. Por tanto, los "años de estudiante" no fueron tan perdidos como su frustrado padre y sus inquietas hermanas suponían, por no decir nada del pobre Peter, cuando Karl volvió al seno de su familia después de cuatro años en Bonn sin conseguir un título.

Se produjo una terrible pelea. Le increparon. Seguramente estaría "enfermo de cuerpo y alma" como resultado natural de no saber suficientes leyes, de conocer poca Matemática y de haber bebido mucha cerveza. Sentados en torno a él le contemplaban iracundos, y, lo peor de todo, comenzaron a discutir acerca de él como si hubiera muerto y estuvieran decidiendo lo que debía hacerse con el cadáver. Con respecto a las leyes, Weierstrass tan sólo había tenido un breve encuentro con ellas en Bonn, pero bastaba, y asombró al Decano y a sus amigos por su aguda "oposición" a ser candidato para el grado de Doctor en Leyes. Por lo que se refiere a la Matemática aprendida en Bonn poco era lo que podía decirse. El único hombre de talento, Julius Plücker, que podía haber ejercido una buena influencia sobre Weierstrass estaba tan ocupado con sus múltiples deberes que no tenía tiempo para gastarlo con los discípulos, y Weierstrass nada pudo obtener de él.

Pero como Abel y muchos otros matemáticos de primera categoría, Weierstrass se dirigió a los maestros en los interludios entre su esgrima, y sus libaciones. Así pudo absorber la *Mecánica celeste* de Laplace, que había de despertar en el joven el interés, que persistió durante toda, su vida, por la dinámica y por los sistemas de ecuaciones diferenciales simultáneas. Como es natural su tozudo padre no podía entender estas cosas y su obediente hermano y sus desalentadas hermanas tan sólo sabían que el demonio hablaba por su boca. El hecho era que Karl, el genio de esta pequeña y timorata familia, sobre el que se habían forjado las mayores esperanzas de respetabilidad burguesa, volvía a su hogar, después de cuatro años de rígida economía por parte de su padre, sin un título universitario.

Al fin, transcurridas algunas semanas, un buen amigo de la familia que había simpatizado con Karl desde su infancia, y que tenía afición por la Matemática, sugirió un camino: que Karl se preparara en la vecina Academia de Münster para ser maestro. El joven Weierstrass no sería doctor en filosofía, pero su cargo como maestro le dejaría ratos de ocio que podría dedicar a la Matemática si en realidad tenía verdaderas inclinaciones hacia ella: Weierstrass confesó "sus pecados" a las autoridades de la Academia, y solicitó una oportunidad para realizar un nuevo intento. Su petición fue concedida, y Weierstrass se matriculó, el 22 de mayo de 1839 en Münster para seguir la carrera de maestro, secundario. Este fue un paso importante para lograr más tarde su elevada posición entre los matemáticos, aunque por aquella época pudo pensarse que ser maestro constituiría su única ambición.

La causa de la diferencia en la conducta de Weierstrass hay que buscarla en la presencia en Münster de Christof Gudermann (1798 - 1852), como profesor de Matemática. En aquella época (1839) Gudermann era un entusiasta de las funciones elípticas. Recordaremos que Jacobi había publicado sus *Fundamenta nova* en 1829. Aunque son pocos los que ahora recuerdan las complicadas investigaciones de Gudermann (publicadas por incitación de Crelle en una serie de artículos en su *Journal*), no deben ser olvidadas con tanto menosprecio como suele hacerse por el simple hecho de que hayan pasado de moda. Para su época, Gudermann tuvo lo que parece haber sido una idea original. La teoría de funciones elípticas se puede desarrollar en formas muy diferentes. En una época, cierta forma parece la mejor, mientras en otro momento otra manera algo distinta de abordar la cuestión suele ser considerada como más elegante.

La idea de Gudermann era basar todas las cosas en el desarrollo en serie de potencias de las funciones. (Por el momento nos bastará con estas palabras, cuya significación aparecerá más claramente cuando describamos una de las motivaciones principales de la obra de Weierstrass). Era en realidad una nueva y buena idea, y Gudermann trabajó en ella con la enorme tenacidad alemana durante muchos años, sin quizá darse cuenta de lo que había tras de su inspiración, y que él mismo jamás realizó. Lo más importante en este caso es que Weierstrass hizo de la teoría de series de potencias, inspiración de Gudermann, el nervio de toda su obra en el Análisis. Tomó la idea de Gudermann a cuyas lecciones asistía. En su vida ulterior, contemplando el alcance de los métodos que había desarrollado en el Análisis, Weierstrass solía exclamar: "No hay otra cosa que las series de potencias".

En la conferencia inaugural del curso de Gudermann sobre las funciones analíticas (dicho autor daba diferente nombre, cosa que no tiene importancia) asistieron trece oyentes. Enamorado del tema, el conferenciante abandonaba la tierra, elevándose en el éter del pensamiento puro. En la segunda lección sólo se presentó un oyente, y Gudermann se sintió feliz. El discípulo solitario era Weierstrass. Más tarde ninguna otra persona se aventuró a profanar la santa comunión entre el conferenciante y su único discípulo. Tanto Gudermann como Weierstrass eran católicos y se entendían espléndidamente.

Weierstrass estaba muy agradecido a Gudermann por todo lo que había hecho en su favor, y cuando llegó a ser famoso buscaba todas las oportunidades, cuanto más numeroso público escuchaba, mejor para proclamar su agradecimiento. La deuda no era exigua. Pocos profesores podían ofrecer a sus discípulos algo semejante, la serie de potencias representación de las funciones como un punto de ataque. Además de las lecciones sobre funciones elípticas, Gudermann dio lecciones privadas a Weierstrass sobre "esféricas analíticas".

En 1841, teniendo 26 años, Weierstrass se presentó a los exámenes para obtener el certificado de maestro. El examen se componía de dos partes; escrita y oral. Para la primera se le concedieron seis meses, durante los cuales tenía que escribir tres ensayos sobre tres temas propuestos por los examinadores. El tercer tema dio lugar a una aguda disertación sobre el método socrático en la enseñanza secundaria, método que Weierstrass siguió brillantemente cuando llegó a ser el principal maestro de estudios matemáticos superiores.

Un maestro, al menos en la Matemática superior, puede ser juzgado por los discípulos que forma. Si los discípulos están entusiasmados con sus "claras y bellas lecciones", de las cuales obtienen abundantes apuntes, pero jamás realizan por sí mismos estudios originales al llegar a grados superiores, el maestro debe ser considerado como un completo fracaso cuando se trata de un profesor universitario, y su verdadera esfera de acción debe hallarse en una escuela secundaria o en un colegio particular, cuyo objeto sea producir pulidos petimetres, pero no pensadores independientes. Las lecciones de Weierstrass eran modelos de perfección, pero si tan sólo hubieran sido acabadas exposiciones de diferentes temas, habrían resultado pedagógicamente inútiles. A la perfección de la forma, Weierstrass añadía ese algo intangible que se llama inspiración. Jamás fue un verdadero orador, pero hizo algo más, formó matemáticos creadores en una proporción extraordinariamente elevada de sus discípulos.

El examen que valió a Weierstrass, después de un año de pruebas, el título de profesor de escuela secundaria es una de las cosas más notables que se recuerdan a este respecto. Uno de los trabajos cuya solución se requería constituye el tema más abstruso que puede proponerse para un examen de maestro. En efecto, Gudermann planteó a Weierstrass un verdadero problema matemático: encontrar los desarrollos de series de potencias de las funciones elípticas. Se proponían también otros temas, pero el mencionado era probablemente el más interesante.

El informe de Gudermann acerca del trabajo del aspirante pudo haber cambiado el curso de la vida de Weierstrass de haber sido escuchado, pero no causó ninguna impresión donde debía haberla producido.

En un apéndice al informe oficial Gudermann dice: "Este problema,, que en general sería demasiado difícil para un joven analista, fue incluido en el programa con el consentimiento de la comisión". Después de la aprobación de sus ejercicios escritos y de haberse sometido con excelente resultado al examen oral, Weierstrass obtuvo un certificado especial por su contribución a la matemática. Después de mencionar la labor del candidato y de señalar la originalidad en la forma de abordar el tema y la novedad de algunos de los resultados obtenidos, Gudermann declara que el trabajo pone de manifiesto un exquisito talento matemático "que siempre que no se malogre, contribuirá inevitablemente al progreso de la ciencia. Para bien del autor y para bien de la ciencia sería deseable que no fuera maestro secundario y que se buscaran los medios para permitir que intervenga en la instrucción académica... el candidato entra por derecho propio en el rango de los famosos descubridores".

Estas observaciones en parte subrayadas por Gudermann, fueron borradas del informe oficial. Weierstrass obtuvo su certificado, y esto fue todo. Teniendo 26 años comenzó sus tareas de maestro secundario, que iban a absorberle casi 15 años de su vida, incluyendo la década de los 30 a los 40, que de ordinario se considera como la más fecunda en la carrera de un hombre de ciencia.

Su trabajo era excesivo. Sólo un hombre con una férrea determinación y con un enorme vigor físico pudo hacer lo que Weierstrass hizo. Las noches las reservaba para sí, y vivía una doble vida. No fue un bicho raro ni un sabio aldeano absorbido en misteriosas meditaciones más allá de la comprensión de los vulgares mortales. Halló la forma de divertirse, y los jóvenes funcionarios del gobierno y los jóvenes oficiales encontraron en el amable maestro un excelente compañero de libaciones en la cervecería.

Pero aparte de estos joviales compañeros de algunas noches, Weierstrass reverenciaba a otro, desconocido de sus alegres camaradas, Abel, a quien dedicaba largas vigilias. Weierstrass mínimo decía que las obras de Abel jamás se hallaban lejos de su mano. Cuando llegó a ser el mejor analista del mundo y el mejor maestro matemático de Europa, su primero y último consejo a sus numerosos discípulos fue "leed a Abel". Siempre tuvo una ilimitada admiración por el gran noruego, sin que se proyectara en ella la menor sombra de envidia. "¡Qué feliz es Abel!, solía exclamar, ha hecho algo duradero. Sus ideas siempre ejercerán una fecunda influencia sobre nuestra ciencia".

Lo mismo puede decirse de Weierstrass, y las ideas creadoras con que fecundó a la Matemática fueron en su mayor parte elaboradas cuando era un oscuro maestro de escuela, en apartadas aldeas donde era imposible obtener libros, y en una época de penurias económicas en las que el franqueo de una carta absorbía una parte prohibitiva de la exigua paga semanal del maestro. Al no poder pagar los gastos de franqueo, Weierstrass vio limitada su correspondencia científica. Quizá esto fuera un bien, pues su originalidad se desarrolló sin verse limitada por las ideas de moda de la época. La independencia de juicio caracteriza su obra de los últimos años. En sus lecciones solía presentar todos los problemas en forma personal, sin hacer apenas referencia a la obra de los demás. Esta forma de exponer sus lecciones se prestaba a equívocos, pues sus oyentes no sabían lo que pertenecía al maestro y lo que correspondía a otros autores.

Será de interés para los lectores matemáticos recordar uno o dos períodos de la carrera científica de Weierstrass. Después del año de prueba para lograr el certificado de maestro en el Instituto de Münster, Weierstrass escribió una memoria sobre las funciones analíticas, donde, entre otras cosas, llega al teorema de Cauchy, el llamado teorema fundamental del Análisis. En 1842 tuvo conocimiento de la obra de Cauchy, pero no reclamó la prioridad (realmente Gauss se había anticipado a ambos, pues sus trabajos datan de 1811, pero como era habitual en él, había dejado inédita su labor para que madurara). En 1842, teniendo 27 años, Weierstrass aplicó los métodos

que había desarrollado a sistemas de ecuaciones diferenciales, como, por ejemplo, las que plantea el problema newtoniano de los tres cuerpos. El tratamiento estaba ya maduro y era riguroso. Estos trabajos fueron emprendidos sin que pensara publicarlos, simplemente para preparar el terreno sobre el cual debía ser construida la obra esencial de su vida (sobre las funciones abelianas).

En 1842 Weierstrass fue maestro ayudante de matemática y física en el Pro-Gymnasium de Deutsch-Krone, Prusia Occidental. Por entonces fue ascendido al cargo de maestro ordinario. Además de las materias mencionadas, este extraordinario analista enseñaba alemán, geografía, y escritura a los niños que estaban a su cargo. En 1845 fue añadida la gimnasia.

En 1848, teniendo 33 años, Weierstrass fue trasladado como maestro ordinario al Instituto de Braunschweig. Se trataba de un ascenso, pero no era mucho. La dirección del Instituto era desempeñada por un hombre excelente, que hizo cuanto pudo en favor de Weierstrass aunque sólo tenía una remota idea de la capacidad intelectual en su colega. El Instituto se jactaba de poseer una pequeña biblioteca de libros cuidadosamente elegidos sobre Matemática y otras ciencias.

Fue este año cuando Weierstrass se apartó algunas semanas de su absorbente matemática para realizar una deliciosa travesura. Aquellos días se veían perturbados políticamente. El virus de la libertad había infectado al paciente pueblo alemán, y al menos algunas de las almas más audaces se encaminaban por la senda de la democracia. El partido realista que estaba en el poder reclamaba una estricta censura sobre todas las manifestaciones habladas o escritas que no fueran suficientemente laudatorias para su régimen. Por entonces los himnos fugitivos a la libertad comenzaron a aparecer en los diarios. Las autoridades no podían tolerar estas subversiones y cuando en Braunschweig florecieron, repentinamente numerosos poetas democráticos, que cantaban loas a la libertad en los diarios locales no sometidos aún a la censura, el gobierno se apresuró a nombrar un censor, creyendo que así todo que daría arreglado.

Por desgracia, el nuevo censor tenía una violenta antipatía para todas las formas de literatura, especialmente la poesía. En consecuencia, se limitó su supervisión a la aburrida prosa política, y pidió al maestro Weierstrass que se dedicara a la censura de las efusiones literarias. Weierstrass estaba contentísimo. Sabiendo que el censor oficial jamás pasaría la mirada por un poema, Weierstrass encontró la forma de que fueran impresas las más encendidas frases bajo las propias narices del censor. Esto regocijó al pueblo hasta que un funcionario superior puso fin a la farsa. Como el censor era oficialmente el único responsable, Weierstrass escapó libre de culpa.

El oscuro rincón de Deutsch-Krone tiene el honor de ser el lugar donde Weierstrass (en 1842 - 1843) dio por primera vez sus trabajos a la imprenta. Las escuelas alemanas publicaban algunas veces "programas" que contenían trabajos debidos a los miembros del cuerpo. Weierstrass contribuyó con un trabajo: *"Observaciones sobre factoriales analíticas"*. No es necesario explicar lo que son; pero conviene señalar aquí que el tema de las factoriales era uno de los que causaban muchos inútiles dolores de cabeza a los más viejos analistas. Hasta que Weierstrass abordó los problemas relacionados con las factoriales, el nudo de la cuestión había pasado inadvertido. Recordaremos que Crelle había escrito mucho acerca de las factoriales, y hemos visto que se hallaba muy interesado en el problema cuando Abel, algo rudamente, le informó que su trabajo contenía graves descuidos. Crelle entra otra vez en escena, y con el mismo fino espíritu que mostró en el caso de Abel.

El trabajo de Weierstrass no fue conocido hasta 1856, catorce años después de haber sido escrito, cuando Crelle lo publicó en su Journal. Weierstrass era entonces famoso. Admitiendo que el riguroso tratamiento empleado por Weierstrass pone al descubierto los errores de su propia obra, Crelle escribe lo siguiente: "Jamás me he aferrado al punto de vista personal de mi obra, ni he



aspirado a la fama ni a los elogios, sino sólo a que la verdad progrese, en cuya labor he puesto lo mejor de mi capacidad; y para mi es lo mismo que la verdad la alcance yo cualquier otro".

Aunque la pequeña aldea de Deutsch-Krone carezca de importancia en la política y el comercio, constituye algo así como la capital de un imperio en la historia de la Matemática, pues fue allí donde Weierstrass, sin el apoyo de una biblioteca y sin ninguna relación con hombres de ciencia, estableció los fundamentos de la obra de su vida, "completar la obra esencial de Abel y Jacobi partiendo del teorema de Abel y del descubrimiento de Jacobi de las funciones periódicas múltiples de varias variables".

Abel, observa Weierstrass, murió en la flor de su juventud, no teniendo la oportunidad de deducir las consecuencias de su extraordinario descubrimiento, y Jacobi no llegó a ver claramente que la verdadera significación de su propia obra debía ser buscada en el teorema de Abel. "La consolidación y ampliación de estas conquistas, la tarea de mostrar las funciones y descubrir sus propiedades, es uno de los problemas principales de la Matemática". Weierstrass declara así su intención de dedicar sus energías a este problema tan pronto como lo haya comprendido totalmente y disponga de los elementos necesarios. Más tarde se queja de la lentitud con que progresan sus estudios: "La elaboración de métodos y otros problemas difíciles ocupan mi tiempo. Los años pasan antes de que pueda llegar al problema principal obstaculizado como me encuentro por un medio desfavorable".

Toda la obra de Weierstrass en el Análisis puede ser considerada como un gran ataque a su problema principal. Resultados aislados, desarrollos especiales y hasta teorías de gran alcance, por ejemplo, la de los números irracionales, como él la desarrolló, se originaron en una fase u otra del problema central. Pronto quedó convencido de que para una clara comprensión de lo que él intentaba hacer era necesario una revisión radical de los conceptos fundamentales del Análisis matemático, y de esta convicción pasó a otra, quizá de mayor significación actual que el problema central: el Análisis debe ser fundado sobre los números enteros comunes 1, 2, 3,... Los irracionales que nos dan los conceptos de límite y continuidad, de los cuales el Análisis surge, deben ser referidos por un razonamiento irrefutable a los números enteros; las falsas pruebas deben ser eliminadas o reformadas, las lagunas deben ser llenadas, y los "axiomas" oscuros deben ser llevados a la luz del estudio crítico, hasta que todos sean comprendidos y expuestos en el lenguaje comprensible de los números enteros. Este es en cierto sentido el sueño pitagórico de basar toda la Matemática sobre los números enteros, pero Weierstrass dio al programa un carácter constructivo definido y realizó la labor.

Se originó así el movimiento del siglo XIX llamado la aritmetización *del Análisis*, algo muy diferente del programa aritmético de Kronecker, del cual nos ocuparemos en un capítulo posterior; en efecto, las dos formas de abordar la cuestión son recíprocamente antagonistas.

De pasada puede señalarse que el plan de Weierstrass para su investigación más importante y el magnífico cumplimiento de la mayor parte de las cosas que se había propuesto cuando era joven, constituye un buen ejemplo del valor del consejo que Félix Klein dio una vez a un discípulo que deseaba conocer el secreto del descubrimiento matemático. "Debéis tener un problema, replicó Klein, elegir un objetivo definido y marchar directamente hacia él. Jamás alcanzaréis la meta, pero encontraréis algunas cosas de interés en el camino".

Desde Deutsch-Krone, Weierstrass fue trasladado a Braunsberg, donde enseñó en el Real Instituto Católico durante seis años, a partir de 1848. El "programa" escolar de 1848-49, contiene un trabajo de Weierstrass que debe haber asombrado a los maestros locales: *Contribuciones a la teoría de las integrales abelianas*. Si este trabajo hubiera caído en las manos de alguno de los matemáticos profesionales de Alemania, la suerte de Weierstrass habría cambiado. Pero, como hace notar su biógrafo sueco Mittag-Leffler, no hay que buscar trabajos que marquen una época

en la Matemática pura en los programas de los institutos secundarios. Weierstrass hubiera podido emplear las hojas de su trabajo para encender la pipa.

Su siguiente esfuerzo tuvo mejor suerte. Las vacaciones del verano de 1853, (Weierstrass tenía entonces 38 años) transcurrieron en la casa de su padre, en Westernkotten. Weierstrass aprovechó las vacaciones para escribir una memoria sobre las funciones abelianas. Terminada la obra la envió al gran *Journal de Crelle*, donde fue aceptada, apareciendo en el volumen 47 (1854).

Quizá sea éste el trabajo cuya elaboración fue la causa de un gracioso incidente en las primeras horas de una mañana en que el Director del Instituto quedó sorprendido por un terrible alboroto que procedía de una clase donde en aquel momento debería hallarse Weierstrass. Pero pronto descubrió que éste no se encontraba allí. Se apresuró a visitar al maestro, y rápidamente le fue franqueada la entrada. Allí estaba sentado Weierstrass, meditando a la luz de la lámpara, corridas aún las cortinas de la habitación. Había trabajado toda la noche y no se había dado cuenta de que había amanecido. El director llamó su atención al hecho de que ya era pleno día, y le informó del tumulto que tenía lugar en su clase. Weierstrass replicó que estaba siguiendo la huella de un importante descubrimiento, que despertaría gran interés en el mundo científico, y que no le era posible interrumpir su labor.

La memoria sobre las funciones abelianas, publicadas en el *Journal de Crelle* (1854) produjo gran sensación. Era una obra maestra salida de la pluma del desconocido profesor de un oscuro pueblo, y del que nadie en Berlín había oído hablar. ¡Era asombroso! Pero por muy sorprendente que fuera la magnitud de la obra, todavía más sorprendente era el hecho de que el trabajador solitario no hubiera publicado trabajos previos que anunciaran sus progresos parciales, y que con una admirable modestia hubiera sabido callar hasta que la obra quedase terminada.

Escribiendo a un amigo, diez años más tarde, Weierstrass hace una prudente explicación de su reserva científica: "... la infinita vacuidad y aburrimiento de aquellos años [como maestro secundario] hubieran sido intolerables sin el arduo trabajo que me hizo un recluso, hasta cuando era considerado como un alegre compañero por el círculo de amigos entre los junkers, abogados, y oficiales jóvenes de la comunidad... El presente no ofrecía nada digno de mencionar, y no era mi costumbre hablar del futuro".

El reconocimiento de su personalidad fue inmediato. En la Universidad de Königsberg, donde Jacobi había hecho sus grandes descubrimientos en el campo en que ahora penetraba Weierstrass con una obra maestra insuperable, Richelot, un digno sucesor de Jacobi en la teoría de funciones periódicas múltiples, era profesor de Matemática. Sus ojos expertos vieron inmediatamente lo que Weierstrass había realizado. Inmediatamente consiguió que su Universidad le concediera el grado de Doctor *honoris causa*, y él mismo se trasladó a Braunsberg para entregar el diploma. En el banquete organizado por el Director del Instituto en honor de Weierstrass, Richelot afirmó que "todos hemos encontrado nuestro maestro en Weierstrass". El Ministro de Educación le ascendió inmediatamente, concediéndole un permiso de un año para proseguir sus trabajos científicos. Borchardt, el editor del *Journal de Crelle* en aquella época, se apresuró a marchar a Braunsberg para felicitar al más famoso analista del mundo, iniciándose así una cálida amistad que duró hasta la muerte de Borchardt, ocurrida 25 años más tarde.

Weierstrass no perdió la cabeza. Aunque profundamente emocionado y hondamente agradecido al generoso reconocimiento que rápidamente le habían acordado, no podía prescindir de lanzar una ojeada retrospectiva sobre su carrera. Años más tarde, pensando en la felicidad de la ocasión y en que esa ocasión se había producido para él cuando tenía cuarenta años, decía tristemente: "¡todas las cosas en la vida llegan demasiado tarde!".

Weierstrass no volvió a Braunsberg. No existiendo en aquel momento ningún cargo adecuado para él, los matemáticos alemanes, haciendo frente al caso, consiguieron que Weierstrass fuera nombrado profesor de Matemática en la Real Escuela Politécnica de Berlín.

La excitación producida por las nuevas condiciones de trabajo y el esfuerzo que suponía el desenvolvimiento de los numerosos cursos dieron lugar a un derrumbamiento nervioso.

Weierstrass también había trabajado excesivamente en sus investigaciones. En el verano de 1859 se vio forzado a abandonar sus lecciones y a someterse a una cura de reposo. Mejorado, continuó su trabajo, pero en el mes de marzo siguiente fue repentinamente atacado por accesos de vértigo, y sufrió un colapso mientras pronunciaba una conferencia.

Durante el resto de su vida padeció esos mismos trastornos, y al reanudar su labor como profesor ordinario, con un trabajo mucho menor, jamás confió en sí mismo para escribir las fórmulas en la pizarra. Tenía la costumbre de sentarse donde podía ver al mismo tiempo a los oyentes y la pizarra, y dictaba a algún discípulo lo que debía escribir. Uno de estos intérpretes del maestro tenía una marcada propensión a modificar lo que el profesor dictaba. Weierstrass se levantaba, y borraba las fórmulas, haciéndole escribir lo que él quería. Algunas veces la batalla entre el profesor y el obstinado alumno se prolongaba varios rounds, pero finalmente Weierstrass ganaba. En todas las ocasiones el maestro creía hallarse ante sus antiguos y traviesos alumnos.

Como la fama de su obra se extendió por Europa (y más tarde por América), las clases de Weierstrass comenzaron a poblarse en tal grado que el profesor se lamentaba algunas veces de que la calidad de sus oyentes se hallaba muy por debajo de la cantidad. De todos modos, reunió alrededor de él cierto número de jóvenes matemáticos muy capaces, dedicados absolutamente a difundir sus ideas, pues Weierstrass, seguía siempre con su costumbre de ser lento en la publicación. Si no hubiera sido por la difusión de sus conferencias que sus discípulos recogían, su influencia sobre el pensamiento matemático del siglo XIX se habría demorado considerablemente.

Weierstrass fue siempre accesible a sus discípulos, y se interesaba sinceramente en sus problemas, matemáticos o humanos. En él no había nada del complejo del "gran hombre", y prefería volver a su hogar en compañía de sus discípulos, que eran muchos, a ser acompañado por los más famosos de sus colegas, especialmente si el colega era Kronecker. Se sentía feliz sentado ante la mesa con un vaso de cerveza, en amable sociedad con algunos de sus devotos discípulos, insistiendo en pagar el importe de las libaciones como un jovial estudiante.

Una anécdota (de Mittag-Leffler), muestra que la Europa actual ha perdido en parte algo que la caracterizaba en el año 1870. La guerra franco-prusiana (1870 - 1871) dejó en Francia un sentimiento de rencor hacia Alemania, pero este rencor no llegaba al espíritu de los matemáticos, que reconocían los méritos de sus compañeros cualquiera fuera su nacionalidad. Lo mismo puede decirse de las guerras napoleónicas y de la mutua estimación de los matemáticos franceses e ingleses. En 1873 Mittag-Leffler llegó a París, desde Estocolmo, lleno de entusiasmo, para estudiar análisis con Hermite. "Estáis equivocado, señor, le dijo Hermite, debéis seguir el curso de Weierstrass en Berlín. Es el maestro e todos nosotros".

Mittag-Leffler siguió el consejo del magnánimo francés, y no tardó mucho en hacer un capital descubrimiento, que puede leerse actualmente en todos los libros sobre la teoría de funciones.

"Hermite era francés y un patriota, observa Mittag-Leffler; aprendí al mismo tiempo en qué grado era también un matemático".

Los años (1864 - 1897) de la carrera de Weierstrass en Berlín, como profesor de Matemática, tiene gran interés científico y humano por lo que se refiere al hombre que era reconocido como el mejor analista del mundo. Una parte de estos sucesos exige una referencia más detenida la que podría corresponder a una biografía puramente científica de Weierstrass: su amistad con su

discípula favorita Sonja (o Sofía) Kowalewski, cuyo nombre de soltera era Sonja Corvin-Kroukowsky. Había nacido en Moscú, Rusia, el 15 de febrero de 1850 y murió en Estocolmo, Suecia, el 10 de febrero de 1890, seis años antes de la muerte de Weierstrass.

Teniendo 15 años, Sonja comenzó el estudio de la matemática, y al llegar a los 18 había hecho tan rápidos progresos que ya estaba preparada con gran entusiasmo para estudios superiores. Como procedía de una familia aristocrática y rica pudo satisfacer su ambición de estudiar en el extranjero; y se matriculó en la Universidad de Heidelberg.

Esta joven, de extraordinario talento, no sólo fue la mujer matemática más conocida de los tiempos modernos, sino que también consiguió una reputación como directora del movimiento para la emancipación de las mujeres, particularmente por lo que se refiere a su supuesta incapacidad en el campo de la educación superior.

Además fue una brillante escritora. Siendo muchacha dudó largo tiempo entre la matemática y la literatura. Después de haber compuesto su trabajo matemático más importante (la memoria premiada a que luego nos referiremos), se dirigió a la literatura como un descanso, y escribió los recuerdos de su infancia en Rusia en forma de novela (publicada primeramente en sueco y en danés). De esta obra se dice que "la crítica literaria de Rusia y de los países escandinavos fue unánime al declarar que Sonja Kowalewski estaba a igual altura, en estilo y pensamiento, que los mejores escritores de la literatura rusa". Por desgracia, esta triunfal iniciación fue truncada por su muerte prematura, y tan sólo han sido recogidos fragmentos de otras obras literarias. Su única novela fue traducida a muchos idiomas.

Aunque Weierstrass nunca se casó, no era un empedernido solterón que ponía pies en polvorosa cuando veía acercarse a una bella mujer. Sonja, a juzgar por lo que se dice de ella, era extraordinariamente hermosa. Debemos narrar, en primer término, cómo llegaron a encontrarse Sonja y Weierstrass.

Weierstrass solía aprovechar las vacaciones de verano en una forma muy humana. La guerra francoprusiana fue causa de que tuviera que prescindir de su viaje de verano en 1870, y permaneció en Berlín pronunciando conferencias sobre las funciones elípticas. Debido a la guerra, su clase estaba constituida por 20 discípulos, en lugar de los 50 que solían asistir a sus lecciones dos años antes. Desde el otoño de 1869, Sonja Kowalewski, entonces una muchacha deslumbrante de 19 años, estaba estudiando funciones elípticas con Leo Königsberger en la Universidad de Heidelberg. Allí seguía además las conferencias sobre física de Kirchhoff y Helmholtz y conoció también a Bunsen, el famoso químico, en las graciosas circunstancias que más tarde recordaremos. Königsberger, uno de los primeros discípulos de Weierstrass, era un ferviente devoto de su maestro. Sonja se contagió de su entusiasmo, y resolvió dirigirse directamente a Weierstrass para seguir sus inspiraciones.

La situación de las estudiantes solteras en el año 1870 era algo anómala, y empezaremos por recordar que Sonja, cuando tenía 18 años, había contraído un verdadero matrimonio nominal, habiendo dejado a su marido en Rusia, mientras ella se dirigió a Alemania. Por parecerle una cuestión sin importancia, no se había cuidado de informar a Weierstrass, al principio, de que estaba casada.

Decidida a seguir las lecciones del maestro, Sonja reunió valor y visitó a Weierstrass en Berlín. Ella tenía 20 años y era muy trabajadora, muy seria y muy resuelta; él tenía 55, y no olvidaba a Gudermann, a quien debía lo que era, que le había enseñado con el ejemplo a sentir una simpática comprensión para las ambiciones de la gente joven. Para disimular su azoramiento, Sonja llevaba un gran sombrero, que casi le tapaba el rostro, "por tanto, Weierstrass no llegó a ver aquellos maravillosos ojos, a cuya elocuencia, cuando ella lo deseaba, nadie podía resistir".

Dos o tres años más tarde, visitando Heidelberg, Weierstrass supo de labios de Bunsen, un terrible solterón, que Sonja era "una mujer peligrosa". Weierstrass se divirtió mucho del terrible terror de su amigo, pues Bunsen no sabía que Sonja había recibido frecuentes lecciones privadas de Weierstrass durante dos años.

El pobre Bunsen basaba su opinión respecto a Sonja en una amarga experiencia personal. Durante años había proclamado que a ninguna mujer, y especialmente a ninguna mujer rusa, le sería permitido profanar la santidad masculina de su laboratorio. Una de las amigas rusas de Sonja deseaba ardientemente estudiar química en el laboratorio de Bunsen, y al no haber sido admitida se dirigió a Sonja, para que ensayara su capacidad de persuasión sobre el áspero químico.

Dejando el sombrero en su casa, Sonja visitó a Bunsen. El químico no pudo resistir los encantos de Sonja y aceptó a su amiga para que trabajara en su laboratorio. Después de terminar la entrevista se dio cuenta de lo que había hecho, y Bunsen se lamentaba diciendo: "Ahora esa *mujer* me ha hecho comer mis propias palabras".

La evidente seriedad de Sonja en su primera visita impresionó favorablemente a Weierstrass, quien inmediatamente escribió a Königsberger preguntándole acerca de sus aptitudes matemáticas. El maestro indagaba también si "la personalidad de la dama ofrecía las necesarias garantías". Habiendo recibido una contestación llena de entusiasmo, Weierstrass intentó obtener de la Comisión Directiva de la Universidad que admitiese a Sonja a sus conferencias matemáticas. Al ser bruscamente rechazada la petición decidió dedicar a la joven sus horas libres.

Todos los domingos por la tarde Sonja visitaba al maestro, y una vez por semana Weierstrass devolvía su visita. Después de algunas lecciones, Sonja abandonó su sombrero. Las lecciones comenzaron en el otoño de 1870 y continuaron, con ligeras interrupciones debidas a vacaciones y enfermedades, hasta el otoño de 1874. Cuando por alguna razón los amigos no podían reunirse, mantenían correspondencia. Después de la muerte de Sonja en 1891, Weierstrass quemó todas las cartas de ella, junto con otra correspondencia, y probablemente con algún trabajo matemático.

La correspondencia entre Weierstrass y su encantadora amiga es cálidamente humana, hasta cuando las cartas se refieren especialmente a la Matemática. Gran parte de esa correspondencia tenía, sin duda, considerable importancia científica, pero desgraciadamente Sonja era una mujer poco ordenada, y muchos de los documentos encontrados después de su muerte eran trabajos fragmentarios en terrible confusión.

El mismo Weierstrass no admitía parangón a este respecto. Sin conservar copias, prestaba sus manuscritos inéditos a los discípulos, que no siempre los devolvían. Algunos llegaron a apropiarse indebidamente investigaciones del maestro, publicando los resultados como propios. Aunque Weierstrass se queja de esta condenable práctica en las cartas a Sonja, su lamentación se refiere más al hecho de que sus trabajos cayeran en manos incompetentes, con el consecuente daño para la Matemática, que al hecho de que le fueran arrebatadas sus ideas. Sonja, como es natural, jamás hizo nada parecido, pero en otro respecto tampoco está libre de culpa. Weierstrass le envió uno de sus trabajos inéditos, entre los muchos que tenía, y no volvió a verlo. Parece que la joven lo perdió, pues discretamente trata de eludir la cuestión siempre que el maestro se refiere a ella.

Para compensar esta falta, Sonja hizo cuanto pudo para que Weierstrass tomara razonables precauciones respecto al resto de su obra no publicada. Weierstrass tenía la costumbre de transportar en sus frecuentes viajes una gran caja de madera blanca donde encerraba todas sus anotaciones, y los diversos apuntes referentes a trabajos que aun no había terminado. Era su hábito modificar las teorías muchas veces hasta que encontraba la forma mejor, la forma natural de desenvolverlas. En consecuencia publicaba con lentitud, y tan sólo ponía su firma bajo el trabajo cuando había agotado el tema desde todos los puntos de vista. Varios de sus proyectos en

embrión estaban guardados ,en la misteriosa caja. En 1880, mientras Weierstrass realizaba un viaje de vacaciones, perdió la caja, y jamás volvió a oír hablar de ella.

Después de obtenido su título in *absentia*, Sonja volvió a Rusia, desde Göttingen en 1874, para descansar del exceso de trabajo. Su fama la precedió y su reposo consistió en entregarse a las vanidades de una vida social en San Petersburgo, mientras Weierstrass, que permanecía en Berlín, intentaba por toda Europa buscar a su discípula favorita una posición digna de su talento. Sus esfuerzos inútiles le enemistaron con muchos de los estrechos talentos académicos ortodoxos.

En octubre de 1875, Weierstrass recibió de Sonja la noticia de que su padre había muerto; pero parece que ella jamás contestó a su conmovida condolencia, y durante casi tres años no tuvo la menor noticia de su vida. En agosto de 1878, Weierstrass volvió a escribir a su antigua discípula preguntándole si había recibido una carta escrita hacía tanto tiempo que había olvidado la fecha. "¿No recibisteis mi carta? ¿Qué puede impedirnos confiar libremente en mí, vuestro mejor amigo, como solíais llamarme, y según acostumbrabais a hacer? Es un enigma cuya solución ninguna otra persona puede darme..."

En la misma carta Weierstrass le pide patéticamente que niegue el rumor de que ha abandonado la Matemática. Chebycheff, un matemático ruso, visitó a Weierstrass cuando éste se hallaba ausente, pero le comunicó a Borchardt que Sonja se "había entregado a la vida social", y así había ocurrido en efecto. "Dirija su carta a Berlín, a la, antigua dirección, concluye Weierstrass, será un regalo para mí".

La ingratitud del hombre para el hombre es un tema bastante conocido; Sonja demostró ahora que una mujer puede hacer lo mismo cuando quiere. No respondió a la carta de su viejo amigo, aunque sabía que ello le disgustaba y que su salud era precaria.

La respuesta, cuando llegó, fue todavía peor. Sonja se acordó que era mujer, y consideró como la mejor de sus ambiciones vivir felizmente con su marido. Desgraciadamente para ella fue el foco de una admiración aduladora y torpe de una serie de artistas, periodistas y supuestos literatos superficialmente brillantes, que ensalzaban sin cesar su insuperable genio. Si hubiera frecuentado la sociedad de intelectuales que le correspondía, habría continuado una vida normal y mantenido su entusiasmo. Además, no habría tratado al hombre que moldeó su talento del modo indigno en que lo hizo.

En octubre de 1878 nació "Foufie", la hija de Sonja.

El forzado reposo después de la llegada de Foufie hizo revivir el interés matemático de la madre, y entonces escribió a Weierstrass para, lograr sus consejos. Weierstrass contestó que debía repasar la bibliografía más importante antes de aventurar una opinión. Aunque ella le había despreciado, seguía dispuesto a alentarla en lo que pudiera. Su única lamentación (en una carta de octubre de 1880) es que su largo, silencio le había privado de la oportunidad de ayudarla. "No me gusta, hablar demasiado del pasado cuando tenemos el futuro ante nuestros ojos".

Tribulaciones materiales llevaron a Sonja al camino de la verdad. Habiendo nacido matemática no podía alejarse de la Matemática, lo mismo que los patos no pueden alejarse del agua. Por tanto, en octubre de 1880 (cuando tenía 30 años) volvió a escribir a Weierstrass solicitando nuevamente consejo. No tuvo paciencia para esperar la contestación, y se trasladó inmediatamente desde Moscú a Berlín. De haber recibido la respuesta quizá hubiera permanecido donde estaba. De todos modos, cuando la aturdida Sonja llegó inesperadamente, Weierstrass, le dedicó todo un día para resolver sus dificultades. La charla debió ser larga y provechosa, pues cuando volvió a Moscú, tres meses más tarde, se dedicó a la Matemática con tal furia que sus alegres amigos y necios parásitos no la reconocían. Por consejo de Weierstrass abordó el problema de la propagación de la luz en un medio cristalino.

En 1882 la correspondencia sigue dos nuevos rumbos, uno de los cuales tiene interés matemático. El otro es la franca opinión de Weierstrass de que Sonja y su marido no han nacido el uno para el otro, especialmente debido a que el marido no aprecia los méritos intelectuales de ella. El punto matemático se refiere a Poincaré, que se hallaba al comienzo de su carrera. Con su instinto seguro para reconocer los talentos jóvenes, Weierstrass considera a Poincaré como un hombre del futuro, y espera que llegará a curarse de su propensión a publicar con demasiada rapidez y que sabrá aguardar a que sus investigaciones maduren sin que se difundan en un campo demasiado amplio. "Publicar un artículo de verdadero mérito todas las semanas es imposible", decía Weierstrass refiriéndose al diluvio de trabajos de Poincaré.

Las dificultades domésticas de Sonja se resolvieron con la muerte repentina de su marido, en marzo de 1883. En aquella época Sonja estaba en París y él en Moscú. La conmoción la dejó postrada. Durante cuatro días permaneció sola, rechazando el alimento, pero al sexto día pidió papel y lápiz, y comenzó a escribir fórmulas matemáticas. Hacia el otoño ya se hallaba repuesta, y asistió a un congreso científico en Odesa.

Gracias a Mittag-Leffler, Sonja Kowalewski obtuvo al fin la posición ambicionada. En otoño de 1884 pronunció conferencias en la Universidad de Estocolmo, donde fue nombrada más tarde (1889) profesora. Poco después tuvo una contrariedad desconcertante cuando el matemático italiano Vito Volterra señaló un grave error en su obra sobre la refracción de la luz en un medio cristalino. Este error había escapado a Weierstrass, quien por entonces estaba tan sobrecargado de trabajo con sus deberes oficiales, que, aparte de ellos, "tan sólo tenía tiempo para comer, beber y dormir". Weierstrass decía: "Padezco lo que los doctores llaman agotamiento del cerebro". Tenía por entonces cerca de 70 años, pero aunque sus males físicos aumentaban, su capacidad intelectual permanecía tan poderosa como siempre.

Al cumplir el maestro los setenta años, le fueron rendidos honores públicos, acudiendo sus discípulos nuevos y viejos de todas las partes de Europa. Más tarde, sus conferencias fueron cada vez más escasas, pero durante 10 años recibió a algunos de sus discípulos en su propia casa. Cuando veían que estaba fatigado, daban de lado la Matemática y hablaban de otras cosas, o escuchaban las palabras del sociable anciano recordando sus travesuras de estudiante y los tristes años de su aislamiento. Sus ochenta años fueron celebrados con una ceremonia aun más impresionante, pues Weierstrass llegó a ser, en cierto grado, un héroe nacional del pueblo alemán.

Una de las mayores alegrías que tuvo Weierstrass en sus últimos años fue al saber que su discípula favorita había recibido el premio que merecía. En las Navidades de 1888 le fue entregado a Sonja personalmente el premio Bordin de la Academia Francesa de Ciencias, por su memoria: *Sobre la rotación de un cuerpo sólido alrededor de un punto fijo*.

Como es costumbre en tales premios la memoria debía ser presentada anónimamente (el nombre del autor era enviado en sobre cerrado, llevando fuera el mismo lema inscripto en la memoria, y el sobre únicamente se abría cuando se trataba de la obra que había obtenido el premio), de modo que los celosos rivales no tenían la oportunidad de insinuar que el premio se había logrado por influencias. En opinión de los jueces el trabajo tenía un mérito tan excepcional que se aumentó la cuantía del premio desde 3.000 francos a 5.000. El valor monetario era, sin embargo, lo menos importante del premio.

Weierstrass no cabía de gozo. "No necesito decirlo, escribía, hasta qué punto sus triunfos han alegrado mi corazón y los de mis hermanas, así como el de sus amigos. Yo particularmente he experimentado una verdadera satisfacción. Jueces competentes han dictado su veredicto de que mi fiel discípula, mi "punto débil", no es una "frívola tramposa".

Dejemos a los amigos en su momento de triunfo. Dos años más tarde (10 de febrero de 1891) murió Sonja en Estocolmo, teniendo 41 años, después de un breve ataque de gripe, que en aquella época era epidémica. Weierstrass la sobrevivió seis años, muriendo pacíficamente, cuando tenía 82 años, el 19 de febrero de 1897, en su casa de Berlín después de una larga enfermedad complicada con gripe. Su último deseo fue que el sacerdote no pronunciara alabanza alguna durante los funerales, y que se limitara a los rezos habituales.

Sonja está enterrada en Estocolmo; Weierstrass, con sus dos hermanas, en un cementerio católico de Berlín. Sonja pertenecía también a la fe católica, a la Iglesia cristiana.

Haremos una alusión a dos de las ideas básicas sobre las que Weierstrass fundó su obra en Análisis. Los detalles o una explicación exacta estarían fuera de lugar aquí, y pueden encontrarse en los primeros capítulos de cualquier libro que trate de la teoría de funciones. Una *serie de potencias* es una expresión de la forma

$$a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$$

en la cual los coeficientes  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  son números y  $z$  una variable; los números correspondientes pueden ser reales o complejos.

Las sumas de 1, 2, 3, ... términos de la serie, o sea  $a_0, a_0 + a_1z, a_0 + a_1z + a_2z^2, \dots$  se llaman *sumas parciales*. Si para algún valor particular de  $z$  esas sumas parciales dan una sucesión de números que convergen hacia un límite definido, se dice que la serie de potencias convergen hacia el mismo límite para ese valor de  $z$ .

Todos los valores de  $z$  para los cuales las series de potencias convergen hacia un límite constituyen el *campo de convergencia* de las series; para cualquier valor de la variable  $z$  en este campo las series convergen; para otros valores de  $z$  divergen.

Si las series convergen para algún valor de  $z$ , su valor se puede calcular con la aproximación que se quiera tomando un número suficientemente grande de términos.

Ahora bien, en la mayoría de los problemas matemáticos que tienen aplicaciones a la ciencia, la "respuesta" es indicada como la solución de una ecuación diferencial (o sistema de tales ecuaciones), y esta solución sólo rara vez se obtiene como una expresión finita de funciones matemáticas reunidas en tablas (por ejemplo logaritmos, funciones trigonométricas, funciones elípticas, etc.). En tales problemas es necesario hacer dos cosas: demostrar que la serie converge; si así ocurre, calcular su valor numérico con la aproximación requerido.

Si la serie no converge es de ordinario un signo de que el problema ha sido incorrectamente planteado o erróneamente resuelto. Las numerosas funciones que se presentan en Matemática pura son tratadas en la misma forma, lo mismo que tengan o no aplicaciones científicas, y, finalmente se ha elaborado una teoría general de la convergencia para explicar vastos campos de estas cuestiones, de modo que el examen individual de la serie particular muchas veces se refiere a investigaciones de mayor alcance ya realizadas.

Finalmente, todo ello (trátase de Matemática pura o aplicada) se extiende a series de potencias de 2, 3, 4... variables en lugar de la única variable  $z$ , como en el caso citado; por ejemplo

$$a + b_0 + b_1w + c_0z^2 + c_1zw + c_2w_2$$

Puede decirse que sin la teoría de las series de potencias la mayor parte de la física matemática (incluyendo gran parte de la astronomía y de la astrofísica), tal como la conocemos hoy, no existiría.



Las dificultades que surgen con los conceptos de límite, continuidad y convergencia impulsaron a Weierstrass a la creación de su teoría de números irracionales.

Supongamos que extraemos la raíz cuadrada de 2, como se hace corrientemente, llevando el cálculo hasta un gran número de cifras decimales. Tendremos como aproximaciones sucesivas de la raíz cuadrada pedida la sucesión de números

$$1, 1.4, 1.41, 1.412, \dots$$

Con suficiente paciencia, procediendo mediante pasos bien definidos según la regla usual, podemos, si es necesario, mostrar el primer millar, o el primer millón, de los números racionales  $1, 1.4, \dots$  que constituyen esta sucesión de aproximaciones. Examinando esta sucesión vemos que, cuando llegamos suficientemente lejos, tenemos un número racional perfectamente definido que contiene tantas cifras decimales como nos plazca (por ejemplo 1000, y que éste número racional difiere de cualquiera de los números racionales *sucesivos* de la sucesión en un número (decimal), tal como  $.000\dots 000\dots$ , en el cual se presenta un número correspondientemente grande de ceros antes de que aparezca otro dígito (1, 2, ..., 6 ó 9).

Esto ilustra lo que se quiere significar por una *sucesión convergente* de números: los racionales  $1, 1.4, \dots$  que constituyen la sucesión nos dan aproximaciones más exactas al "número irracional" que llamamos la raíz cuadrada de 2, y que concebimos como *definido* por la *sucesión convergente de números racionales*, admitiéndose esta definición en el sentido de que se ha indicado un método (el usual) de calcular *cualquier término particular de la sucesión en un número finito de etapas*.

Aunque es imposible, en realidad, mostrar la sucesión total, no deteniéndose en cualquier número finito de términos, consideramos, de todos modos, el *proceso* para construir cualquier número de la sucesión como una concepción suficientemente clara de la sucesión total con un objeto único definido, acerca del cual podemos razonar. Al hacer esto disponemos de un método para usar la raíz cuadrada de 2, y de modo análogo para cualquier número irracional, en el Análisis matemático.

Según se ha dicho, es imposible hacer esto de un modo preciso en un libro como el presente, pero, hasta en este caso, un cuidadoso examen permite descubrir alguna de las objeciones lógicas que pueden hacerse a la explicación precedente, objeciones que inspiraron a Kronecker y a otros autores para atacar la definición de los irracionales de Weierstrass por medio de sucesiones convergentes.

Estuvieran o no en lo cierto, Weierstrass y su escuela consiguieron resultados de la teoría. Los resultados más útiles logrados no han sido discutidos, al menos sobre la base de su gran utilidad en el Análisis matemático y sus aplicaciones, por ningún juez competente. Esto no significa que no puedan hacerse objeciones, y simplemente llamar la atención sobre el hecho de que en Matemática, como cualquier otra cosa, no debe confundirse esta tierra con el Reino de los Cielos, que la perfección es una quimera, y que, según las palabras de Crelle, sólo podemos esperar acercarnos cada vez más a la verdad matemática siempre que esto pueda ser, precisamente como en la teoría de Weierstrass de las sucesiones convergentes de números racionales que definen los irracionales.

Después de todo ¿por qué los matemáticos, que son seres humanos como el resto de los mortales, siempre serán tan pedantemente exactos y tan inhumanamente perfectos? Weierstrass dijo: "Cierto es que un matemático que no tiene también algo de poeta, jamás será un perfecto matemático". He aquí la respuesta: un matemático perfecto, por el mismo hecho de su perfección poética, será una imposibilidad matemática.

