Capítulo Vigesimoquinto
EL HOMBRE QUE DUDA

KRONECKER

Todos los resultados de la más profunda investigación matemática deben en definitiva ser expresables en la forma simple de propiedades de los números enteros.
Leopold Kronecker.

Los matemáticos profesionales que con propiedad pueden ser llamados hombres de negocios son extraordinariamente raros. El que más se aproxima a este ideal es Kronecker (1823-1891), quien se las arregló de modo que cuando tenía 33 años pudo ya dedicar su talento soberbio a la Matemática mucho más cómodamente de lo que la mayor parte de los matemáticos han podido hacer.

El anverso de la carrera de Kronecker se encuentra, según una tradición familiar a los matemáticos americanos, en las empresas de John Pierpont Morgan, fundador de la banca Morgan and Company. Si es cierta esta tradición, Morgan, siendo estudiante en Alemania, mostró una capacidad matemática tan extraordinaria que sus profesores trataron de convencerle de que se dedicara para siempre a la Matemática, ofreciéndole un cargo universitario en Alemania que le facilitaría la labor. Morgan se negó, y dedicó todo su talento a las finanzas con los resultados que todos conocen. Los especuladores (en estudios académicos, no en Wall Street) pueden entretenerse reconstruyendo la historia del mundo sobre la hipótesis de que Morgan se hubiera dedicado a la Matemática.

Lo que habría sucedido en Alemania si Kronecker no hubiese abandonado las finanzas por la Matemática, ofrece también un amplio campo para la especulación. Su capacidad para los negocios era de primer orden; además era un ardiente patriota con una notable visión de la diplomacia europea, y un astuto cinismo que sus admiradores llamaron realismo.

Al principio fue liberal, como muchos jóvenes intelectuales judíos, pero Kronecker pronto se hizo conservador cuando no sólo tuvo el pan asegurado, sino también la manteca. Después de sus empresas financieras se proclamó leal defensor del implacable Bismark. El famoso episodio del despacho de Ems, que según algunos fue la chispa eléctrica que desencadenó la guerra franco-prusiana en *1870,* tuvo la cálida aprobación de Kronecker, y su comprensión de la situación era tan firme, que ya *antes* de la batalla de Weissenburg, cuando aun podía dudarse del genio militar de Alemania para rivalizar con Francia, Kronecker predijo confiadamente el triunfo de toda la campaña hasta en muchos de sus detalles. En aquella época, y en realidad durante toda su vida, estuvo en relaciones cordiales con los mejores matemáticos franceses, y tuvo la suficiente claridad de juicio para que sus opiniones políticas no nublaran su justa percepción de los méritos de sus rivales científicos. Quizá haya sido un bien que un hombre tan realista como Kronecker uniera su destino con el de la Matemática.

La vida de Leopold Kronecker fue fácil desde el día de su nacimiento. Hijo de judíos ricos, nació el *7* de diciembre de *1823* en Liegnitz, Prusia. Por un inexplicable descuido de los biógrafos oficiales de Kronecker (Heinrich Weber y Adolf Kneser) nada se sabe acerca de la madre de Leopold, aunque probablemente tuvo una, pues se limitaron al padre, quien tenía un negocio mercantil floreciente. El padre era un hombre bien educado, con una sed insaciable para la filosofía que transmitió a Leopold. Tuvo otro hijo, Hugo, de 17 años menos que Leopold, quien fue distinguido fisiólogo y profesor en Berna. La primera educación de Leopold con un profesor particular fue vigilada por el padre; la educación de Hugo vino a ser más tarde un agradable deber de Leopold.

La segunda fase de su educación en la escuela preparatoria para el Instituto Leopold fue notablemente influido por el co-rector Werner, un hombre con tendencias filosóficas y teológicas, quien más tarde instruyó a Kronecker cuando ingresó en el Instituto. Entre otras cosas, Kronecker se contagió de Werner de un liberalismo de teología cristiana; para el cual tuvo un entusiasmo que duró toda su vida. Con su cautela habitual Kronecker no abrazó la fe cristiana hasta prácticamente hallarse en el lecho de muerte, y entonces se permitió convertirse desde el judaísmo al cristianismo evangélico, teniendo 68 años.

Otro de los maestros de Kronecker en el Instituto, que también influyó profundamente sobre él, llegando a ser un amigo de toda la vida, fue Ernst Eduard Kummer(1810-1893), quien luego fue profesor en la Universidad de Berlín. Se trataba de uno de los matemáticos más originales que ha producido Alemania y de él volveremos a ocuparnos al hablar de Dedekind. Estos tres hombres, Kronecker padre, Werner y Kummer, administraron la inmensa capacidad innata de Leopold, modelaron su mente y encauzaron el futuro curso de su vida, de modo tan perfecto que aunque lo hubiera deseado le habría sido imposible separarse del camino marcado.

Ya en esta primera fase de su educación observaremos un rasgo notable del carácter general de Kronecker; su capacidad para tratar a las gentes y su instinto para contraer amistades duraderas con hombres de elevada posición o que ocuparían altos cargos, los cuales podrían serle útiles en los negocios o en la Matemática. Esta capacidad para lograr amistades convenientes, que es uno de los rasgos que distinguen a los hombres de negocios, fue una de las más características de Kronecker, y jamás le falló. No era un hombre conscientemente interesado ni presumido, sino tan sólo uno de esos felices mortales que triunfan con más facilidad que fracasan.

El comportamiento de Kronecker en el Instituto fue brillante y multifacético. Además de los clásicos idiomas griego y latino, que dominó con facilidad, y a los que toda su vida se sintió inclinado, estudió hebreo, filosofía y Matemática. Su talento matemático apareció precozmente bajo la experta guía de Kummer, del cual recibió atención especial. Sin embargo, el joven Kronecker no se concentró especialmente sobre la Matemática, aunque era evidente que su máximo talento se manifestaba en ese campo, sino que se dedicó a adquirir una amplia educación liberal, apropiada a sus múltiples capacidades. Aparte de estos estudios tomó lecciones de música, y fue un excelente pianista y cantante. La música, declaraba cuando ya era anciano, es la más bella de todas las bellas artes, con la posible excepción de la Matemática, que él comparaba a la poesía. Durante toda su vida conservó todas estas inclinaciones que siempre cultivó con entusiasmo. Su amor hacia los estudios clásicos dieron fruto tangible cuando se afilió a la Graeca, una sociedad dedicada a la traducción y popularización de los clásicos griegos. Su aguda apreciación del arte hizo de él un excelente crítico de pintura y escultura, y su bella casa de Berlín fue el lugar de cita de los músicos, entre ellos Félix Mendelssohn.

Después de ingresar en la Universidad en la primavera de 1841, Kronecker continuó su amplia educación, pero comenzó a concentrarse sobre la Matemática. Berlín se jactaba en aquella época de tener en su Facultad de matemática a Dirichlet (1805-1859), Jacobi (18041851) y Steiner (1796-1863).Eisenstein (1823-1852), que tenía la misma edad de Kronecker, también se estudiaba allí, y los dos llegaron a ser amigos.

La influencia de Dirichlet sobre los gustos matemáticos de Kronecker (particularmente en la aplicación del Análisis a la teoría de números) se aprecia claramente en sus escritos de madurez. Steiner parece que no causó gran impresión sobre él; Kronecker no sentía inclinación por la Geometría. Jacobi despertó su entusiasmo por las funciones elípticas, que iba a cultivar con gran originalidad y brillante resultado, principalmente en las nuevas aplicaciones de mágica belleza a la teoría de números.

La carrera universitaria de Kronecker fue una repetición en gran escala de sus años del Instituto: asistió a conferencias sobre los clásicos y las ciencias y satisfizo sus inclinaciones hacia la filosofía mediante estudios más profundos de los que hasta entonces se habían hecho, particularmente en el sistema de Hegel. Hacemos notar esto último debido a que algún curioso y competente lector puede intentar buscar el origen de las herejías matemáticas de Kronecker en la confusa dialéctica de Hegel, cuestión que está más allá de la capacidad de quien esto escribe. De todos modos, existe una extraña semejanza entre la heterodoxia de las dudas recientes respecto a la existencia de la Matemática por sí misma, de cuyas dudas la "revolución" de Kronecker fue en parte responsable, y las sutilezas del sistema de Hegel. El candidato ideal para esta empresa podría ser un comunista marxista con un sólido conocimiento de la lógica polivalente polaca, aunque sólo Dios sabe dónde puede hallarse este raro personaje.

Siguiendo la costumbre de los estudiantes alemanes, Kronecker no permaneció todo el tiempo en Berlín. Parte de su carrera fue realizada en la Universidad de Bonn, donde su viejo maestro y amigo Kummer ocupaba la cátedra de Matemática. Durante la permanencia de Kronecker en la Universidad de Bonn, las autoridades universitarias habían emprendido una guerra para suprimir las sociedades estudiantiles, cuyo principal objeto era fomentar la embriaguez, los duelos, y las querellas en general. Con su habitual habilidad, Kronecker se alió secretamente con los estudiantes, e hizo muchos amigos que más tarde le fueron útiles.

La disertación de Kronecker, aceptada por la Universidad de Berlín para concederle el título de Doctor en filosofía, en el año 1845, fue inspirada por la obra de Kummer sobre la teoría de números, y se ocupa de las unidades en ciertos campos de números algebraicos. Aunque el problema tiene extraordinaria dificultad, su naturaleza puede ser comprendida teniendo en cuenta la siguiente explicación, en grandes líneas, del problema *general* de unidades (para *cualquier* campo numérico algebraico, no simplemente para los campos *especiales* que interesaron a Kummer y Kronecker). Este resumen puede también servir para hacer más inteligible algunas de las alusiones del presente capítulo y de los capítulos siguientes a la obra de Kummer, Kronecker y Dedekind en la Aritmética superior. La cuestión es muy sencilla, pero, requiere algunas definiciones preliminares.

Los números enteros comunes 1, 2, 3... son llamados los números enteros racionales (positivos). Si m es cualquier entero racional, será la raíz de una ecuación algebraica de *primer* grado, cuyos coeficientes *son enteros racionales*, o sea

$$x - m = 0.$$

Esta entre otras propiedades, de los enteros racionales sugiere la *generalización* del concepto de enteros a los "números" definidos como raíces de ecuaciones algebraicas. Así, si *r* es una raíz de la ecuación

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

donde las *a* son enteros racionales (positivos o negativos), y si además *r* no satisface una ecuación de grado menor que *n*, cuyos coeficientes son enteros racionales y cuyo primer coeficiente es 1 (como ocurre en la ecuación antes mencionada, o sea el coeficiente de la potencia más elevada, x^n, de *x* en la ecuación es 1), entonces *r* se llama un *entero algebraico de grado n*. Por ejemplo, $1+\sqrt{-5}$ es un entero algebraico de grado 2, debido a que es la raíz de $x^2 - 2x + 6 = 0$, y no es una raíz de cualquier ecuación de grado menor que 2 con coeficiente del tipo prescrito; de hecho $1+\sqrt{-5}$ es la raíz de $x - (1+\sqrt{-5} = 0)$,
y el último coeficiente, $-(1+\sqrt{-5})$, no es un entero racional.
Si en la anterior definición de un *entero algebraico* de grado *n* suprimidos la condición de que el primer coeficiente sea 1, y decimos que puede ser cualquier entero racional (diferente de cero, que es considerado como un entero), una raíz de la ecuación se llama entonces un *número algebraico de* grado *n*. Así ½ $(1+\sqrt{-5})$es un número algebraico de grado 2, pero no es un *entero* algebraico; es una raíz de

$$2x^2 - 2x + 3 = 0.$$

Se introduce ahora otro concepto, el de *campo numérico algebraico de grado n*: si *r* es un número algebraico de grado n, la totalidad de todas las expresiones que pueden ser construidas partiendo de *r* por adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones repetidas (la división por 0 no se define, y por tanto no se ensaya ni permite) se llama el campo numérico algebraico *engendrado por* r, y puede ser denotado por *F(r)*. Por ejemplo, de *r* tendremos $r + r$, o $2r$; de esto y *r* tendremos $2r/r$ ó 2, 2r - 2 ó *r*, $2r \times 2$ ó $2r^2$,etc. El *grado* de este *F [r]* es *n*.
Puede demostrarse que cualquier número de F [r] es de la forma

$$c_0 r^{n-1} + c_1 r^{n-2} + \ldots + c_{n-1}$$

donde las *c* son número racionales, y además cualquier miembro de *F [r]* es un número algebraico de grado no mayor que *n* (de hecho el grado es algún divisor de *n*). Algunos, pero no todos los números algebraicos de *F [r]* serán enteros algebraicos.
El problema central de la teoría de números algebraicos es investigar las leyes de la divisibilidad aritmética de los enteros algebraicos en un campo numérico algebraico de grado *n*. Para que este problema quede definido es necesario establecer exactamente lo que quiere decirse por "divisibilidad aritmética", y para ello debemos comprender el mismo concepto para los enteros *racionales.*
Decimos que un entero racional, *m*, es divisible por otro, *d*, si podemos encontrar un entero racional, *q*, tal que *m = q ´ d; d* (también *q)* es llamado un divisor de *m*. Por ejemplo, 6 es un divisor de 12, pues $12 = 2 \times 6$; 5 no es un divisor de 12, debido a que no existe un entero racional *q* tal que $12 = q \times 5$.

Un *primo* racional (positivo) es un entero racional mayor que 1 cuyos únicos divisores positivos son 1 y el entero mismo. Cuando intentamos extender esta definición a los enteros algebraicos pronto vemos que no encontramos la raíz de la cuestión, y debemos buscar alguna propiedad de los primeros racionales que pueda ser llevada a los enteros algebraicos. Esta propiedad es la siguiente: Si un primo racional p divide el producto $a \times b$ de dos enteros racionales, entonces (es posible demostrarlo) p divide al menos a uno de los factores a, b, del producto.
Considerando la unidad 1 de la Aritmética racional, nos damos cuenta de que 1 tiene la propiedad peculiar de que divide todo entero racional; -1 tiene también la misma propiedad, y 1,- 1 son los únicos enteros racionales que tiene esta propiedad.
Estas y otras claves sugieren algunas cosas muy sencillas que intervienen para establecer las siguientes definiciones como la base para una teoría de la divisibilidad aritmética de los enteros algebraicos. Supongamos que todos los enteros considerados pertenecen a un campo numérico algebraico de grado n.
Si r, s, t, son enteros algebraicos tales que $r = s \times t$, tanto s como t se denominan un divisor de r.
Si j es un entero algebraico que divide todo entero algebraico en el campo ,j se llama una *unidad (en* ese campo). Un campo dado puede contener una infinidad de unidades a diferencia del par 1, -1 para el campo racional, y esta es una de las cosas que siembran dificultades.
Lo siguiente introduce una distinción radical y perturbadora entre enteros racionales y enteros algebraicos de grado mayor que 1.
Un entero algebraico, que no sea una unidad, cuyos solos divisores son unidades y el entero mismo, se llama *irreducible*. Un entero algebraico irreducible que tiene la propiedad de que si divide el producto de dos enteros algebraicos dividirá al menos uno de los factores, se llama un entero algebraico *primo*. Todos los primos son irreducibles, pero no todos los irreducibles son primos en *algunos* campos numéricos algebraicos, por ejemplo en F[$\sqrt{-5}$],como se verá en seguida. En la Aritmética común de 1,2,3... los irreducibles y los primos son lo mismo.
En el capítulo sobre Fermat hemos mencionado el teorema fundamental de la Aritmética (racional): un entero racional es el producto de primos (racionales) *en una sola forma*. De este teorema brota toda la intrincada teoría de la divisibilidad para los enteros racionales. Por desgracia, el teorema fundamental *no* puede mantenerse en todos los campos numéricos algebraicos de grado mayor que uno, y el resultado es el caos.
Para citar un ejemplo (es el ejemplo corrientemente citado en los manuales sobre la cuestión), en el campo F($\sqrt{-5}$) tenemos

$$6 = 2 \times 3 = (1+ \sqrt{-5})\times(1 - \sqrt{-5});$$

y cada uno de 2,3,1, + $\sqrt{-5}$,1 - $\sqrt{-5}$, es un primo en este campo (como puede ser comprobado con cierta facilidad), de modo que 6, en este campo, *no es únicamente* descomponible en un producto de primos.
Podemos decir aquí que Kronecker venció esta dificultad por un método muy bello que es demasiado complicado para poderlo explicar sin tecnicismo, y que Dedekind consiguió lo mismo por un método totalmente diferente, que es mucho más fácil de comprender, y al que hemos de referirnos cuando consideremos la vida de este investigador. El método de Dedekind es el más empleado actualmente, pero esto no significa que el de Kronecker sea menos importante ni que goce de menor favor cuando la Matemática se familiarice con él.

En su disertación de 1845 Kronecker abordó la teoría de la divisibilidad en ciertos campos especiales, los definidos por las ecuaciones que surgen de la fórmula algebraica del problema de Gauss para dividir la circunferencia en *n* partes iguales, o, lo que es lo mismo, construir un polígono regular de *n* lados.
Podemos ahora terminar una parte de la exposición iniciada por Fermat. Luchando para demostrar el último teorema de Fermat, quien enunció que

$$x^n + y^n = z^n$$

es imposible en enteros racionales x, y, z (no cero) si n es un entero mayor que 2, los matemáticos dieron lo que parece un paso perfectamente natural, descomponiendo la primera parte de la ecuación $x^n + y^n$, en sus factores de primer grado (como se explica en el segundo curso del Álgebra elemental). Esto condujo a una agotadora investigación del campo numérico algebraico antes mencionado en relación con el problema de Gauss, después de haberse cometido errores graves, pero fácilmente comprensibles.
El problema estaba al principio rodeado de trampas, en las cuales cayeron muchos competentes matemáticos, incluso uno de los grandes, Cauchy. Este autor aceptó como natural que en el campo numérico algebraico correspondiente debe mantenerse el teorema fundamental de la Aritmética. Después de algunas interesantes, pero prematuras comunicaciones a la Academia Francesa de Ciencias comprendió su error. Como era un hombre inquieto, a quien le interesaba gran número de estos problemas al mismo tiempo, Cauchy abandonó la cuestión, sin realizar el gran descubrimiento que estaba dentro de la capacidad de su prolífico genio, y abandonó el campo a Kummer. La dificultad central era grave: había una especie de "enteros", los referentes al campo que desafiaban al teorema fundamental de la Aritmética. ¿Cómo conseguir que obedecieran a la ley?
La solución de este problema por la invención de un tipo totalmente nuevo de "números" adecuado a la situación, que restablecen automáticamente el teorema fundamental de la Aritmética, constituye, junto con la creación de la Geometría no euclidiana, una de las conquistas científicas sobresalientes del siglo XIX, y quizá sea uno de los descubrimientos matemáticos más importantes de toda la historia. La creación de los nuevos "números", llamados "números ideales", fue obra de Kummer en 1845. Estos nuevos números no estarían construidos para todos los campos numéricos algebraicos, sino sólo para aquellos campos que se originan en la división del círculo.
Kummer se enredó en la red donde cayó Cauchy, y durante cierto tiempo creyó que había demostrado el último teorema de Fermat. Luego, Dirichlet, a cuya crítica fue sometida la supuesta prueba, señaló, por medio de un ejemplo, que el teorema fundamental de la Aritmética, en oposición a la afirmación tácita de Kummer, *no* se cumple en el campo correspondiente. Este fracaso de Kummer constituyó una de las cosas más afortunadas que han sucedido en la Matemática. Lo mismo que en el error inicial de Abel en la cuestión de la quíntica general, Kummer volvió al buen camino e inventó sus "números ideales".
Kummer, Kronecker y Dedekind con su invención de la teoría moderna de los números algebraicos, ampliando el alcance de la Aritmética *ad infinitum*, y llevando las ecuaciones algebraicas dentro de los límites del número, hicieron por la Aritmética superior y la teoría de ecuaciones algebraicas lo que Gauss, Lobatchewsky, Johann Bolyai, y Riemann hicieron por la Geometría al emanciparla de la. estrecha esclavitud de Euclides. Y lo mismo que los inventores de la Geométrica no euclidiana revelaron vastos y hasta entonces insospechados horizontes a la Geometría y a la ciencia física, así también los creadores de la teoría de números algebraicos

arrojaron una luz completamente nueva que iluminó toda la Aritmética y aclaró las teorías de ecuaciones, de los sistemas de curvas y superficies algebraicas y la verdadera naturaleza del número mismo sobre la firme base de claros y simples postulados.

La creación de "ideales", la inspiración de Dedekind basada en la visión de Kummer de los "números ideales", renovó no sólo la Aritmética, sino toda el Álgebra que surge de la teoría de ecuaciones y de los sistemas algebraicos de tales ecuaciones, y pudo verse que era también una clave, en la que podía confiarse, para la significación interna de la "Geometría enumerativa"[1] de Plücker, Cayley y otros, que absorbió una buena cantidad de las energías de los geómetras del siglo XIX ocupados con las intersecciones de las redes de curvas y superficies. Y finalmente, si la herejía de Kronecker contra el análisis de Weierstrass (como más tarde observaremos) llega a ser algún día una anticuada ortodoxia, como ocurre más pronto o más tarde con todas las herejías que no son totalmente absurdas, estas renovaciones de nuestros enteros familiares, 1, 2, 3..., sobre los que todo Análisis se esfuerza en basarse, darán en definitiva nuevos alcances al Análisis, y la especulación pitagórica podrá contemplar propiedades generadoras del "número" que Pitágoras jamás pudo soñar en toda su indómita filosofía.

Kronecker inició este difícil y bello campo de los números algebraicos el año 1845, cuando tenía veintidós, con su famosa disertación *De Unitatibus Complexis.* Las unidades particulares de que trataba eran aquellas que en los campos numéricos algebraicos surgen del problema gaussiano de la división de la circunferencia en *n* arcos iguales. Por este estudio obtuvo su titulo de doctor en filosofía.

Las Universidades alemanas tenían la laudable costumbre de que el candidato triunfante, al obtener su título de doctor, invitara a una reunión, casi siempre consistente en una fiesta en la cervecería, a sus jueces. En tales fiestas era habitual burlarse de los exámenes haciendo una serie de ridículas preguntas seguidas de respuestas aún más ridículas. Kronecker invitó prácticamente a toda la Facultad, incluyendo al decano, y el recuerdo de aquella fiesta para celebrar la obtención de su título fue, según decía posteriormente, el más feliz de su vida.

En un aspecto, al menos, Kronecker y su enemigo científico Weierstrass eran muy semejantes. Ambos eran excelentes caballeros. Pero en todas las otras cosas su diferencia era casi cómica. El clímax de la carrera de Kronecker fue su prolongada guerra matemática contra Weierstrass, en la que no se daba ni pedía cuartel. Uno era un algebrista innato, el otro había hecho casi una revolución del Análisis. Weierstrass era alto, Kronecker diminuto pero recio, y aunque su altura no llegaba a metro y medio sus proporciones eran perfectas. Después de sus días de estudiante, Weierstrass abandonó la esgrima; Kronecker fue siempre excelente gimnasta y nadador, y más tarde buen alpinista.

Los testigos de las batallas entre esta incomparable pareja cuentan cómo el voluminoso enemigo era aturdido por la tenacidad de su pequeño contrincante, de quien quería deshacerse como un buen perro de San Bernardo quiere ahuyentar una molesta mosca. Kronecker excitaba a Weierstrass con sus ingeniosos ataques, hasta que Weierstrass huía a grandes zancadas, llevando sobre sus talones a Kronecker, quien continuaba hablando como un loco. Pero, pese a sus diferencias científicas, los dos eran buenos amigos, y ambos eran grandes matemáticos, sin un ápice del complejo de "gran hombre" que muchas veces infla .a los supuestos poderosos.

[1] Un problema de este tipo es el siguiente: Una curva algebraica puede también volverse sobre ella, o colocarse donde la curva cruza sus tangentes; dado el grado de la curva ¿cuántos de esos puntos existen? O si no podemos responder a esta pregunta ¿qué ecuaciones deben mantenerse que relacionen el número de éstos y de otros puntos excepcionales? Lo mismo puede decirse para las superficies.

Kronecker tuvo la suerte de tener un tío rico influyente en los bancos, que también se ocupaba de grandes empresas agrícolas. Todos estos negocios cayeron en las manos del joven Kronecker a la muerte de su tío, poco después de que el matemático en embrión había obtenido su título a la edad de 22 años. Los ocho años siguientes (1845 a 1853) fueron empleados en la administración de las propiedades y en poner en orden los negocios, cosa que Kronecker hizo con gran tenacidad y excelente resultado. Para poder administrar eficazmente sus propiedades rurales tuvo que estudiar los principios de la agricultura.

En 1848, cuando tenia 25 años, el joven y enérgico hombre de negocios se enamoró de su prima Fanny Prausnitzer, hija de su difunto y poderoso tío, y se casó con ella. Tuvo seis hijos, cuatro de los cuales sobrevivieron a sus padres. El matrimonio Kronecker fue muy feliz, y él y su mujer, bella y con talento, educaron a sus hijos con la mayor devoción. La muerte de la mujer de Kronecker, pocos meses antes de su última enfermedad, fue el golpe que le derrumbó.

Durante los ocho años dedicados a los negocios Kronecker no publicó nada respecto a cuestiones matemáticas. Pero no quedó estancado matemáticamente, según lo demuestra la publicación, en 1853, de un trabajo fundamental sobre la solución algebraica de las ecuaciones. A pesar de su actividad como hombre de negocios, Kronecker mantuvo una viva correspondencia científica con su antiguo maestro Kummer, y, en cuanto pudo escapar de ese género de vida, visitó París, (1853), donde conoció a Hermite y a otros importantes matemáticos franceses. Jamás interrumpió su comunicación con el mundo científico cuando las circunstancias le obligaron a cuidar sus intereses, y pudo mantener vivos sus conocimientos, haciendo de la Matemática su diversión favorita.

En 1853, cuando se publicó la memoria de Kronecker sobre la resolución algebraica de las ecuaciones (la naturaleza del problema fue discutida en los capítulos sobre Abel y Galois), la teoría de ecuaciones de Galois era comprendida por muy pocos. La manera cómo abordó Kronecker el tema es característica de su inteligente labor. Kronecker había comprendido la teoría de Galois, y posiblemente fue el único matemático de la época que logró penetrar profundamente en las ideas de dicho autor. Liouville se contentó con una visión de la teoría que le capacitó para completar inteligentemente algunos de los trabajos de Galois.

Una característica de la forma cómo Kronecker abordaba las cuestiones fue su minuciosidad comprensiva. En ésta, como en otras investigaciones en Álgebra y en la teoría de números, Kronecker tomó el oro refinado de sus predecesores, lo pulió como un elegante joyero, añadió gemas propias, e hizo con todo el precioso material una obra de arte que llevaba el inconfundible sello de su individualidad artística. Le gustaban las cosas perfectas; algunas de sus páginas muestran muchas veces el completo desarrollo de un resultado aislado con toda sus implicaciones, pero no sobrecargan el tema principal con excesivos detalles. En consecuencia, hasta el más breve de sus trabajos ha dado lugar a descubrimientos importantes de sus sucesores, y sus investigaciones más largas constituyen inagotables minas de bellos problemas.

Kronecker fue lo que se llama un "algorista" en la mayor parte de sus obras. Le gustaba exponerla cuestión mediante fórmulas concisas donde automáticamente iban apareciendo las fases sucesivas, y cuando se llegaba a la cuestión más importante era posible volver atrás en todo el razonamiento, y ver la aparente inevitabilidad de la conclusión surgida de las premisas. Los detalles auxiliares eran crudamente podados hasta que aparecía el nudo principal de la cuestión, con todo su vigor y simplicidad. Brevemente, Kronecker era un artista que utilizaba las fórmulas matemáticas como su medio de expresión.

Después que los trabajos de Kronecker sobre la teoría de Galois, el tema pasó de ser la propiedad privada de unos pocos a constituir la propiedad común de todos los algebristas, y Kronecker procedió tan artísticamente que la siguiente fase de la teoría de ecuaciones se puede atribuir a él.

Su objetivo en Álgebra, como el de Weierstrass en Análisis, era buscar el camino natural, una cuestión de intuición y de gusto más que de definición científica, para llegar al corazón de sus problemas.
El mismo espíritu artístico y la misma tendencia a la unificación aparece en otro de sus más celebrados trabajos que tan sólo ocupa un par de páginas en sus obras completas, *Sobre la resolución de la ecuación general de quinto grado,* que fue publicado primeramente en 1858. Hermite, recordaremos, dio la primera solución, por medio de las funciones elípticas (modulares), en el mismo año. Kronecker alcanzó la solución de Hermite, o lo que es prácticamente lo mismo, aplicando las ideas de Galois al problema, dando lugar a que el milagro pareciera "más natural".
En otro trabajo (1861), también breve, en el cual gastó la mayor parte de sus horas durante cinco años, volvió al tema, y buscó las razones de *porqué* la ecuación general de quinto grado se puede resolver en la forma conocida, dando así un paso más allá de Abel, quien estableció la cuestión de la resolución "por radicales".
Gran parte de la obra de Kronecker tiene marcado matiz aritmético, tanto de Aritmética racional como de las más amplia Aritmética de los números algebraicos. En efecto, si su actividad matemática ha tenido una clave directriz, puede decirse que su deseo, quizá subconsciente, fue aritmetizar toda la Matemática, desde el Álgebra al Análisis. Dios hizo los números enteros, dijo, el resto es obra del hombre. La pretensión de Kronecker de que el Análisis debía ser reemplazado por la Aritmética finita fue la raíz de su desacuerdo con Weierstrass. La aritmetización universal puede ser un ideal demasiado estrecho para la frondosidad de la Matemática moderna, pero al menos tiene el mérito de la mayor claridad.
La Geometría jamás fue seriamente abordada por Kronecker. El período de la especialización ya había progresado lo bastante cuando Kronecker realizó su labor, y probablemente sería imposible para cualquier hombre haber producido una obra de tipo tan perfecto como la realizada por Kronecker como algebrista y en su tipo peculiar de Análisis, y al mismo tiempo descubrir otras cosas de importancia en otros campos. La especialización ha sido frecuentemente condenada, pero tiene sus virtudes.
Un rasgo característico de muchos de los descubrimientos técnicos de Kronecker es la perfección con que teje los tres hilos de sus disciplinas favoritas, la teoría de números, la teoría de ecuaciones y las funciones elípticas, para formar una bella trama en la que se revelan simetrías imprevistas y muchos detalles que pasaron inadvertidos para otros. Cada uno de los instrumentos que empleó parecía que había sido designado por el destino para la más eficaz función de los demás. No contento con aceptar esta misteriosa unidad como un simple misterio, Kronecker buscó y encontró la estructura esencial en la teoría de Gauss de las formas cuadráticas binarias, donde lo primero y principal es investigar las soluciones en números enteros de ecuaciones indeterminadas de segundo grado con dos incógnitas.
La gran obra de Kronecker en la teoría de números algebraicos no forma parte de esta urdimbre. También se separó algunas veces de sus aficiones principales cuando, siguiendo la moda de su época, se ocupó de los aspectos matemáticos puros de ciertos problemas (en la teoría de la atracción así como en la gravitación newtoniana) de la física matemática. Sus contribuciones en este campo fueron de interés matemático más que de interés físico.
Hasta la última década de su vida, Kronecker fue un hombre libre, sin obligaciones. Sin embargo, aceptó voluntariamente deberes científicos, por los que no recibió remuneración alguna, cuando hizo uso de su privilegio como miembro de la Academia de Berlín para pronunciar conferencias en la Universidad berlinesa. Desde 1861 a 1883 organizó cursos regulares en la Universidad, principalmente sobre sus investigaciones personales, después de las explicaciones necesarias. En 1883, Kummer, entonces en Berlín, se retiró, y Kronecker ocupó el puesto de su antiguo maestro

como profesor ordinario. En este período de su vida viajó mucho y participó con frecuencia en las reuniones científicas celebradas en Gran Bretaña, Francia y Escandinavia.

Durante toda su carrera como profesor de Matemática, Kronecker rivalizó con Weierstrass y otras celebridades, cuyos temas eran más populares que los suyos. El Álgebra y la teoría de números jamás han atraído tanto al público como la Geometría y el Análisis, posiblemente debido a que se aprecian mejor las relaciones de estos últimos con la ciencia física.

Kronecker toleró este aristocrático aislamiento sin repugnancia y hasta con cierta satisfacción. Sus bellas y claras introducciones a sus cursos hacían creer erróneamente a sus oyentes que las subsiguientes lecciones serían fáciles de comprender. Esta creencia se evaporaba rápidamente a medida que el curso progresaba, y después de tres o cuatro sesiones tan solo quedaban algunos fieles y obstinados oyentes, mientras la mayor parte desertaba para ir a escuchara Weierstrass. Kronecker se regocijaba y decía en broma que debía colocarse una cortina
después de las dos primeras filas de sillas, pues así el conferenciante y los oyentes gozarían de mayor intimidad. Los pocos discípulos que conservaba le seguían devotamente, paseando con él para continuar las discusiones comenzadas en el aula, y con frecuencia era posible asistir en las pobladas aceras de las calles de Berlín al divertido espectáculo de ver a un hombrecillo muy excitado, que hablaba con todo su cuerpo, especialmente con las manos, a un grupo de estudiantes que obstaculizaba el tránsito. Su casa estaba siempre abierta a sus discípulos, cosa que producía gran alegría al maestro, y su generosa hospitalidad constituyó una de las más grandes satisfacciones de su vida. Varios de sus discípulos llegaron a ser eminentes matemáticos, pero su "escuela" era el mundo entero, y no hacía esfuerzo alguno por ampliar y formar una escuela artificial.

Esta fue la característica de la obra independiente de Kronecker. En una atmósfera de confiada creencia en la solidez del Análisis, Kronecker asumió el antipático papel del filósofo que duda. No son muchos los grandes matemáticos que han tomado en serio la filosofía; en efecto, la mayoría parece haber considerado con repugnancia las especulaciones filosóficas, y cualquier duda epistemológica que afectara la solidez de su obra ha sido casi siempre ignorada o impacientemente descartada.

Con Kronecker la cuestión era diferente. La parte más original de su obra, donde fue un verdadero precursor, es el desarrollo natural de sus inclinaciones filosóficas. Su padre, Werner, Kummer, y sus amplias lecturas filosóficas, influyeron sobre él para que tuviera una perfecta visión crítica de todos los conocimientos humanos, y cuando contemplaba la Matemática desde este discutido punto de vista, no la excluía porque se tratase de un campo de su particular predilección, sino que la infundía un acre pero beneficioso escepticismo. El hombre que duda, no se dirige a sí mismo ni a los que viven, sino, como Kronecker decía, "a quienes vendrán después de mí". En la actualidad esos sucesores han llegado, y debido a sus esfuerzos unidos, aunque con frecuencia se hayan producido contradicciones, comenzamos a apreciar claramente la naturaleza y significación de la Matemática.

Weierstrass (Capítulo XXII) había construido el Análisis matemático sobre su concepto de número irracional definido por infinitas sucesiones de números racionales. Kronecker no sólo discutió con Weierstrass;, hubiera atraído a Eudoxio. Para él, como para Pitágoras, únicamente "existen" los números enteros creados por Dios 1, 2, 3,... El resto es un vano ensayo de la humanidad para corregir al Creador. Weierstrass, en cambio, creía que al menos había hecho la raíz cuadrada de 2 tan comprensible y tan fácil de tratar como el 2 mismo; Kronecker negaba que la raíz cuadrada de 2 "existía", y afirmaba que es imposible razonar consecuentemente acerca de la construcción de Weierstrass respecto a esta raíz o a cualquier otro irracional. Ni sus colegas

más ancianos ni el joven a quien Kronecker se dirigía dieron a sus revolucionarias; ideas una entusiasta bienvenida.
Weierstrass mismo parece que se sentía incómodo; ciertamente se creía ofendido. Su gran emoción se manifiesta en una tremenda sentencia alemana[2] semejante a una fuga, cuya traducción es muy difícil. "Pero lo peor de ello es, afirma Weierstrass, que Kronecker usa su autoridad para proclamar que todos los que han intervenido ahora para establecer la teoría de funciones son pecadores ante el Señor. Cuando un individuo curioso y excéntrico como Christoffel [el hombre cuya obra algo olvidada iba a ser, años después de su muerte, un importante instrumento en la Geometría diferencial que en la actualidad se emplea en la matemática de la relatividad], dice que en 20 ó 30 años la actual teoría de funciones quedará enterrada, y que la totalidad del Análisis será referido a la teoría de las: formas, replicamos encogiéndonos de hombros. Pero cuando Kronecker pronuncia el siguiente veredicto, que repito *palabra* por *palabra: "Si* el tiempo y la salud me lo permiten yo mismo mostraré al mundo matemático que no sólo la Geometría sino también la Aritmética puede señalar el camino al Análisis, y seguramente un camino más riguroso. Si no puedo hacerlo por mí mismo, lo harán los que vengan después de mí, y se reconocerá la inexactitud de todas las conclusiones en que el llamado Análisis se basa al presente", tal veredicto, pronunciado por un hombre cuyo gran talento y cuya obra matemática admiro tan sinceramente y con tanto placer como todos sus colegas, no sólo es humillante para quienes él pretende que abjuren de su conocimientos y que renuncien a la esencia de lo que ha constituido el objeto de sus pensamientos y de su incansable labor, sino que también es una invitación directa a la generación más joven para que deserte de sus actuales conductores y se afilien como discípulos de un nuevo sistema que *debe* ser fundado. Ciertamente esto es triste, y me llena de gran amargura ver a un hombre cuya gloria no tiene manchas, dejarse impulsar por sentimientos indignos de su grandeza a manifestaciones cuyo efecto injurioso sobre los demás parece no percibir.”
"Pero bastantes de estas cosas a las que aludo tan sólo las expongo para explicaros porqué no experimento el mismo goce que antes en mis enseñanzas aunque mi salud me permita continuar mi labor algunos años más. Pero no debéis hablar de ello; no les gustaría a otras personas que no me conocen como me conocéis, para ver en lo que digo la expresión de un sentimiento que es de hecho extraño a mí".
Weierstrass tenía 70 años, y cuando escribía estas palabras su salud era precaria. De haber vivido ahora, hubiera visto su gran sistema floreciendo aun, como el proverbial laurel siempre verde. Las dudas de Kronecker han estimulado el examen crítico de los fundamentos de toda la Matemática, pero no han podido destruir el Análisis. Si alguna cosa de singular significación ha de ser reemplazada por algo más firme pero aun desconocido, parece probable que sea una buena parte de la obra de Kronecker pues la critica que él preveía ha dejado al descubierto puntos débiles que él no sospechó. El tiempo nos hace necios a todos. Nuestro solo consuelo es que más lo serán los que vengan detrás de nosotros.
La "revolución" de Kronecker como sus contemporáneos llamaron a su subversivo ataque al Análisis hacía desaparecer todo de la Matemática, salvo los números enteros positivos. La Geometría desde Descartes ha sido principalmente una cuestión de Análisis aplicada a ordenar pares, ternas. de números reales (los "números" que corresponden a las distancias medidas sobre una determinada línea recta desde un punto fijo sobre la línea). De aquí podría caer bajo el imperio del programa de Kronecker. Un concepto tan familiar como el de un entero negativo, por

[2] En una carta a Sonja Kowalewsky, 1885

ejemplo - 2, no aparecería en la Matemática que Kronecker profetizó, ni tampoco las fracciones comunes.

Las irracionales, como Weierstrass señala, producían una especial repugnancia a Kronecker. Hablar de que $x^2 - 2 = 0$ tiene una raíz carecía de significación. Todas esas repugnancias y objeciones no tienen, como es natural, significación a no ser que pudieran ser reemplazadas por un programa definido que sustituyera al rechazado.

Kronecker realmente hizo esto, al menos en grandes líneas, y mostró que todo el Álgebra y la teoría de números, incluyendo los números algebraicos, pueden ser reconstruidos de acuerdo con dicha exigencia. Para eliminar $\sqrt{-1}$, por ejemplo, tan sólo necesitamos sustituir esta expresión temporalmente por una letra, o sea *i*, y considerar polinomios qué contengan *i* y otras letras, o sea *x, y*, ... Luego manipularemos estos polinomios como en Álgebra elemental, tratando *i* como cualquiera de las otras letras, hasta el último paso, cuando todo polinomio que contenga *i* se divida por $i^2 + 1$ y se descartan todas las cosas salvo el resto obtenido de esta división. Quien recuerde algo de la Geometría elemental puede fácilmente convencerse de que esto nos conduce a todas las propiedades que nos son familiares de los misteriosamente mal llamados números "imaginarios" de los libros de texto. De una manera semejante, los negativos y las fracciones y todos los números algebraicos (que no sean los enteros racionales positivos) son eliminados de las Matemáticas, si así se desea, y sólo permanecen los benditos enteros positivos. La inspiración acerca de cómo eliminar $\sqrt{-1}$ se remonta a Cauchy en 1847. Este fue el germen del programa de Kronecker.

Quienes no sienten simpatía por la "revolución" de Kronecker, la llaman un putsch, que es algo más parecido a una reyerta entre, borrachos que a una verdadera revolución. De todos modos, ha llevado en los últimos años a dos movimientos de crítica constructiva en toda la Matemática: la necesidad de que sea dada o demostrada posible una construcción en un número finito de etapas para cualquier "número" u otra "entidad" matemática cuya "existencia" se indica, y la desaparición en la Matemática de todas las definiciones que no puedan ser expuestas explícitamente en un número finito de palabras. La insistencia sobre estas exigencias ha hecho mucho para aclarar nuestro concepto de la naturaleza de la Matemática, pero aun queda mucho por hacer. Como esta obra está aun en marcha demoraremos su ulterior consideración hasta ocuparnos de Cantor, pues entonces será posible citar ejemplos.

El desacuerdo de Kronecker con Weierstrass no deja la desagradable impresión que produciría si ignoramos el resto de la vida generosa de Kronecker. Kronecker no tuvo la intención de herir a su amable compañero; dejaba correr su lengua en el calor de una discusión puramente matemática, y Weierstrass, cuando estaba de buen humor, se reía de los ataques, sabiendo bien que del mismo modo como él había perfeccionado la obra de Eudoxio, sus sucesores probablemente perfeccionarían la suya. Es posible que si Kronecker hubiera tenido treinta centímetros más de estatura no se hubiera visto obligado a vociferar cuando hacía sus objeciones al Análisis. Gran parte de la disputa puede interpretarse suspicazmente como debida a una manifestación de un injustificado complejo de inferioridad.

La reacción de muchos matemáticos a la "revolución" de Kronecker fue resumida por Poincaré cuando dijo que Kronecker fue capaz de realizar una excelente obra matemática debido a que, frecuentemente olvidó su propia filosofía matemática. Como no pocos epigramas, este es lo suficientemente falso para ser ingenioso.

Kronecker murió de una afección bronquial, en Berlín, el 29 de diciembre de 1891, teniendo 69 años.