Capítulo Decimocuarto
EL PRINCIPE DE LA MATEMATICA

GAUSS

La nueva elaboración y desarrollo de la Aritmética sistemática, así como casi todas las otras cosas que ha producido, aparte de la Matemática, nuestro siglo (XIX) en la forma de ideas científicas originales, están ligadas a Gauss.

Leopold Kronecker

Arquímedes, Newton y Gauss son tres hombres que constituyen una clase especial entre los grandes matemáticos y no corresponde a los mortales ordinarios colocarlos en orden a sus méritos. Los tres iniciaron nuevas oleadas en la Matemática pura y aplicada: Arquímedes estimaba su Matemática pura mucho más que sus aplicaciones; Newton parece haber encontrado la principal justificación para sus invenciones matemáticas en el uso científico que de ellas estableció, mientras Gauss declaraba que para él tenía el mismo valor la parte pura y la aplicada. De todos modos, Gauss elevó la Aritmética superior a la categoría de reina de la Matemática.

El origen de Gauss, Príncipe de la Matemática, no era en verdad real. Hijo de padres pobres; había nacido en una miserable casucha en Brunswick, Alemania, el 30 de abril de 1777. Su abuelo paterno era un pobre campesino. En 1740 su abuelo se estableció en Brunswick, donde arrastró una precaria existencia dedicado a la jardinería. El segundo de sus tres hijos, Gerhard Diederich, nacido en 1744, fue el padre de Gauss. Aparte de este gran honor, la Vida de Gerhard, dedicada los trabajos pesados de jardinero, constructor de canales y albañil**,** no se distingue por ningún motivo.

Se dice que el padre de Gauss era un hombre brusco, escrupulosamente honrado, y cuya rudeza para con su hijo algunas veces lindaba en la brutalidad. Su lenguaje era grosero y su mano pesada. Su honradez y su tenacidad le permitieron cierto grado de comodidades, pero su vida jamás fue fácil. No es sorprendente que tal hombre hiciera todo lo que estaba en su mano para que su hijo se frustrase, impidiéndole adquirir una educación adecuada a su capacidad. Si la opinión del padre hubiera prevalecido, el inteligente muchacho habría seguido una de las profesiones familiares, y fue tan sólo una serie de felices incidentes la que salvó a Gauss de ser jardinero o albañil. Siendo niño era respetuoso y obediente, y aunque jamás criticó a su padre en su vida ulterior, se comprende que jamás sintió por él verdadero cariño. Gerhard murió el año 1806.

Por el lado materno Gauss fue en realidad más afortunado. El padre de Dorothea Benz era picapedrero, y murió teniendo 30 años, de tuberculosis, consecuencia de las condiciones poco higiénicas de su oficio; dejó dos hijos, Dorothea y un hermano menor, Friederich.

Aquí el origen del genio de Gauss aparece de modo evidente. Condenado por su miseria económica al oficio de tejedor, Friederich era un hombre muy inteligente y genial, cuyo cerebro agudo e inquieto se nutría en campos muy lejanos de los que le proporcionaban la subsistencia material. Friederich se hizo pronto una notable reputación como tejedor de los más finos damascos, un arte que aprendió por sí mismo. Al encontrar en el hijo de su hermana una mente afín a la suya, el inteligente tío Friederich hizo cuanto pudo para despertar la rápida lógica del muchacho mediante sus observaciones atinadas y con su filosofía algo zumbona de la vida.

Friederich sabía lo que hacía; Gauss en aquella época probablemente no. Pero Gauss tenía una memoria fotográfica y conservó las impresiones de su infancia de un modo perfecto hasta el día de su muerte. Siendo ya adulto recordaba lo que Friederich había hecho por él, y pensaba que con la muerte prematura de aquel hombre "se había perdido un genio innato".

Dorothea se trasladó a Brunswick en 1769. Teniendo 34 años (1776) contrajo matrimonio. El año siguiente nació su hijo, cuyo nombre bautismal era Johann Friederich Carl Gauss. En su vida posterior firmó sus obras maestras con el nombre Carl Friederich Gauss. Si un gran genio se perdió en Friederich Benz, su nombre sobrevivió en su sobrino.

La madre de Gauss era una mujer recta, de gran carácter, de inteligencia aguda y humor alegre. Su hijo constituyó su orgullo desde el día de su nacimiento hasta que ella murió, teniendo 97 años. Cuando el "niño prodigio" tenía dos años asombraba por su extraordinaria inteligencia, que no parecía terrenal, y esa inteligencia mantuvo y hasta superó, al llegar a la pubertad, las promesas de su infancia. Dándose cuenta de ello, Dorothea Gauss defendió al muchacho frente a la obstinación de su marido, que quería mantener a su hijo tan ignorante como él era.

Dorothea esperaba grandes cosas de su hijo. Quizá dudó en alguna ocasión de que su sueño se realizara, como lo demuestran sus preguntas a quien estaba en posición de juzgar el talento de su vástago. Así, cuando Gauss tenía 19 años, la madre preguntó a su amigo el matemático Wolfgang Bolyai, si Gauss llegaría a ser algo. . Cuando Bolyai exclamó "¡Será el más grande matemático de Europa!", ella rompió en lágrimas.

Los últimos 22 años de su vida transcurrieron en la casa de su hijo y durante los últimos cuatro, estaba totalmente ciega. A Gauss poco le importaba la fama, pero sus triunfos constituían la vida de la madre[1]. Entre ellos existió siempre la más completa comprensión, y Gauss pagó su valerosa protección de sus primeros años procurándoles una vejez tranquila.

Cuando quedó ciega, su hijo no permitió que la cuidara otra persona que no fuera él, y sus cuidados se prolongaron hasta su última y larga enfermedad. Murió el 19 de abril de 1839.

De los muchos accidentes que pudieron haber privado a la Matemática de hombres como Arquímedes y Newton, también Gauss recuerda uno ocurrido en su primera infancia. Una crecida primaveral llenó el canal que rodeaba la casucha de la familia, inundando el terreno. Gauss que jugaba cerca del agua casi se ahogó. Pero por feliz casualidad un labrador pudo impedir que su vida terminara allí.

En toda la historia de la Matemática no hay nada que se acerque a la precocidad demostrada por Gauss. Se ignora el momento en que Arquímedes comenzó a dar muestras de su genio, y las precoces

[1] Todavía no está demostrada la leyenda de las relaciones de Gauss con sus padres. Aunque, como veremos más tarde, la *madre* defendía a su hijo, el *padre* se oponía, y como era habitual *entonces* (y también *ahora*) en un hogar alemán, el padre decía la última palabra. Aludiré más tarde a narraciones de personas que aun viven y que conocieron a los miembros de la familia Gauss, especialmente en lo que concierne a cómo trataba Gauss a su hijo. Estas alusiones constituyen pruebas directas, pero no hay que fiarse de ellas, pues las personas a que me refiero eran muy ancianas.

manifestaciones del talento matemático de Newton pasaron inadvertidas. Aunque parezca increíble, Gauss demostró lo que era antes de cumplir los tres años.
Un sábado, Gerhard Gauss estaba echando sus cuentas para pagar a los trabajadores que se hallaban a su cargo, sin darse cuenta de que su hijito seguía esas cuentas con notable atención. Terminados sus largos cálculos**,** Gerhard quedó asombrado al oír que el niño le decía: "La cuenta está mal, debe ser..." Al comprobar las operaciones se pudo ver que las cifras encontradas por el pequeño Gauss eran exactas.
Antes de ésto el niño pudo conocer de sus padres y de los amigos de éstos la pronunciación de las letras del alfabeto y aprendió por sí solo a leer. Nadie le había hablado de la Aritmética, aunque probablemente comprendió la significación de los dígitos 1, 2... al enumerar el alfabeto. En su vida posterior le divertía decir que supo contar antes que hablar. Este prodigioso poder para los cálculos mentales, persistió durante toda su vida.
Poco después de cumplir siete años Gauss ingresó en la escuela primaria, una verdadera reliquia de la Edad Media, regida por un bárbaro, un tal Büttner, quien para enseñar a un centenar de muchachos que se hallaban a su cargo, les sumergía en un estado de estupidez aterrorizada, en la que hasta olvidaban sus nombres. En este infierno Gauss encontró su fortuna.
Nada extraordinario sucedió durante los dos primeros aires. Al cumplir los 10, Gauss ingresó en la clase de Aritmética. Como se trataba de las primeras clases, ninguno de los muchachos había oído hablar de una progresión aritmética. Fácil era al heroico Büttner plantear un largo problema de sumas cuya respuesta podía encontrar en pocos segundos valiéndose de una fórmula.. El problema era del siguiente tipo: 81297 + 81495 + 81693...+ 100899, donde el paso de un número a otro es siempre el mismo (198), debiendo sumarse un cierto número de términos (100).
La costumbre de la escuela era que el muchacho que primero hallaba la respuesta, colocase su pizarra sobre la mesa, el siguiente colocaba la suya sobre la primera y así sucesivamente. Büttner acababa de plantear el problema cuando Gauss colocó su pizarra sobre la mesa: "Ya está", dijo *"Ligget se"*, en su dialecto campesino. Durante toda una hora, mientras los compañeros trabajaban afanosamente, continuó sentado con los brazos cruzados, favorecido de cuando en cuando por una sarcástica mirada de Büttner, quien se imaginaba que el muchachito era un perfecto necio. Al terminar la clase, Büttner examinó las pizarras. En la pizarra de Gauss aparecía un solo número. Cuándo era viejo, a Gauss le gustaba decir que el número que había escrito, constituía la respuesta exacta y que los demás se habían equivocado. Gauss no conocía la estratagema para realizar esos problemas rápidamente. Es muy sencillo una vez conocido el ardid; pero es extraordinario que un muchacho de 10 años, pudiera descubrirlo instantáneamente.
En ese momento se abrió la puerta a través de la cual Gauss pasó a la inmortalidad. Büttner estaba tan asombrado de que un muchacho de 10 años sin instrucción hubiera realizado tal proeza, que desde aquel momento fue, al menos para uno de *sus* discípulos, un maestro humano. De su propio peculio compró el mejor manual de Aritmética que pudo encontrar y se lo entregó a Gauss. El muchacho hojeó rápidamente el libro. "Es superior a mí, dijo Büttner, nada puedo enseñarle".
Büttner probablemente no pudo hacer mucho más en favor del joven genio. Pero por una feliz casualidad el maestro tenía un ayudante, Johann Martín Bartels (1769-1836) un joven que tenía gran pasión por la Matemática, y cuyo deber consistía en ayudar a los principiantes en la escritura, cortándoles las plumas de ave. Entre el ayudante de 17 años y el discípulo de 10 se estableció una

cálida amistad que duró toda la vida de Bartels. Estudiaron juntos ayudándose recíprocamente en las dificultades, y analizaban las pruebas en el manual de Álgebra y de rudimentos de Análisis que poseían. Desde los primeros momentos pudo verse uno de los intereses dominantes de la carrera de Gauss. Rápidamente comprendió el teorema del binomio

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1*2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1*2*3}x^3 + \ldots,$$

en el que n no es necesariamente un número entero positivo, sino que puede ser un número cualquiera. Si n no es un entero positivo, la sucesión del segundo miembro es *infinita*, y para establecer el teorema cuando esta sucesión es igual a $(1+x)^n$, es necesario determinar las limitaciones que hay que imponer a x y n, para que la serie infinita *converja hacia un límite finito definido.* Así, *si* $x = -2$ y $n = -1$, tendremos el absurdo de que $(1-2)^{-1}$, que es $(-1)^{-1}$ ó 1/(-l), o finalmente -1, es igual a $1+2+2^2+2^3+\ldots$ y así hasta *ad infinitum*; es decir, -1 es igual al "número infinito" 1+2+4+8..., lo que no tiene sentido alguno.

Antes de que el joven Gauss se preguntara a sí mismo si la serie infinita converge y realmente nos capacita para calcular las expresiones matemáticas (funciones), que deben representar, los más viejos analistas no se habían tomado la molestia de explicar los misterios (y falta de sentido común) que surgen del empleo falto de crítica de los procesos infinitos. El primer encuentro de Gauss con el teorema del binomio le inspiró la realización de alguna de sus más grandes obras, y fue el primero de los "rigoristas". Una demostración del teorema del binomio cuando n no es un número entero positivo, todavía hoy está más allá de los límites de un manual elemental. No satisfecho con lo que él y Bartels encontraban en los libros, Gauss inventó una nueva demostración, iniciándose así en el Análisis matemático. La verdadera esencia del Análisis es el uso correcto de los procesos infinitos.

La obra comenzada con tan buenos auspicios iba a cambiar todo el aspecto de la Matemática. Newton, Leibniz, Euler, Lagrange, Laplace, todos los grandes analistas de su tiempo, no tenían prácticamente un concepto claro de lo que se acepta ahora como una prueba que abarca los procesos infinitos. Fue Gauss el primero en ver claramente que una "demostración" que puede llevar a absurdos como el de que "menos 1 igual a infinito", no prueba nada. Aún en algunos casos en que una fórmula da resultados consecuentes, no debe ocupar un lugar en la Matemática hasta que se determinan las condiciones precisas en que continúa siendo coherente.

El rigor que Gauss impuso al Análisis se proyectó sobre toda la Matemática, tanto en sus propias costumbres como en la de sus contemporáneos, Abel, Cauchy y sus sucesores, Weierstrass, Dedekind, y toda la Matemática después de Gauss fue algo diferente de lo que había sido la Matemática de Newton, Euler y Lagrange.

En el sentido constructivo Gauss fue un revolucionario. Antes de que terminara su enseñanza secundaria, el mismo espíritu crítico que le impidió quedar satisfecho con el teorema del binomio le llevó a discutir las demostraciones de la Geometría elemental. A la edad de 12 años ya miraba con recelo los fundamentos de la Geometría euclidiana, y teniendo diez y seis, ya tuvo la primera intuición de una geometría diferente de la de Euclides. Un año más tarde comenzó a someter a la crítica las demostraciones de la teoría de números que habían dejado satisfechos a sus predecesores, y se entregó a la tarea extraordinariamente difícil de llenar las lagunas y *completar* lo que había sido hecho a medias. La Aritmética, el campo de sus primeros triunfos, constituyó su estudio favorito, donde realizó sus obras

maestras. A sus propias ideas respecto a lo que constituye la prueba, Gauss añadió una capacidad inventiva matemática tan prolífica que jamás ha sido superada. Esta combinación resultaba invencible.
Bartels hizo algo más que guiar a Gauss en los misterios del Álgebra. El joven profesor conocía a algunos de los hombres más influyentes de Brunswick, quienes favorablemente impresionados por el genio de Gauss, llamaron la atención de Carl Wilhelm Ferdinand, duque de Brunswick.
El duque recibió a Gauss por primera vez en 1791. Gauss tenía 14 años. La modestia y la timidez del muchacho ganaron la simpatía del generoso duque. Gauss obtuvo la seguridad de que su educación podría continuar. El siguiente año (febrero, 1792), Gauss se matriculó en el *Collegium Carolinum* de Brunswick. El duque pagó los gastos y continuó pagándolos hasta que la educación de Gauss terminó.
Antes de ingresar en el Colegio Carolino, a la edad de 15 años, Gauss había hecho grandes progresos en los idiomas clásicos, cuyo estudio realizó privadamente ayudado por antiguos amigos, precipitando así una crisis en su carrera. A su tosco y práctico padre el estudio de las lenguas muertas le llevaron casi a la locura; Dorothea Gauss luchó por su hijo, ganó la batalla, y el duque pagó un curso de dos años en el Instituto. La facilidad con que Gauss dominaba el griego y el latín**,** asombró por igual a los maestros y a los compañeros.
Gauss se sentía atraído por los estudios filológicos, pero, por fortuna, para la ciencia, iba a encontrar mayor atracción en la Matemática. Al ingresar en el Colegio Carolino conocía ya el latín de tal forma que pudo escribir en ese idioma sus obras más importantes. Fue una calamidad, nunca suficientemente lamentada, que hasta el ejemplo de Gauss fuera impotente frente a las oleadas del nacionalismo fanático que invadió Europa después de la Revolución francesa y la caída de Napoleón. En lugar del fácil latín que fue suficiente para Euler y Gauss, ahora hay que lograr un rápido conocimiento de dos o tres idiomas aparte del propio. Gauss se resistió cuanto pudo, pero tuvo que someterse cuando sus amigos de Alemania le presionaron para que escribiera en alemán algunas de sus obras astronómicas.
Gauss estudió en el Colegio Carolino durante tres años, comprendiendo a la perfección las obras más importantes de Euler, Lagrange y sobre todo los *Principia* de Newton. El más alto orgullo de un gran hombre es recibir la estimación de los que son como él. Gauss nunca disminuyó la alta estima que, cuando tenía 17 años, tuvo por Newton. Los demás, Euler, Laplace, Lagrange, Legendre, aparecen en el fluido latín de Gauss con la cortés calificación *clarissimus*; Newton es *summus*.
Estando aún en el Colegio, Gauss comenzó las investigaciones de Aritmética superior que le harían inmortal. Entonces puso en juego su prodigiosa capacidad para el cálculo. Dirigiéndose directamente a los números, experimentó con ellos, descubriendo por inducción teoremas generales difíciles, cuyas demostraciones le costaron gran esfuerzo. En esta forma redescubrió "la joya de la Aritmética", el *"theorema aureum*", al cual Euler llegó también por inducción, o sea la ley de reciprocidad cuadrática, que Gauss iba a ser el primero en demostrar (la prueba intentada por Legendre fracasó).
Toda la investigación se originó en una sencilla cuestión que muchos principiantes en Aritmética se plantean. ¿Cuántas cifras tiene el período de una decimal periódica? Para arrojar alguna luz sobre el problema Gauss calculó los desarrollos decimales de todas las fracciones $1/n$ para $n = 1$ hasta 1000. No encontró el tesoro que buscaba, sino algo infinitamente superior, la ley de reciprocidad cuadrática.
Como puede exponerse con sencillez la explicaremos, mencionando al mismo tiempo una de las conquistas revolucionarias de la nomenclatura y notación aritmética que Gauss inventó, la de la *congruencia*. En lo que sigue todos los números son enteros (números enteros comunes).
Si la *diferencia (a - b ó* b - a) de dos números a, b es exactamente divisible por el número m, decimos que a, b son *congruentes* con respecto al módulo m, y simbolizamos esto escribiendo

$$a \equiv b \text{ (mód } m\text{)}. \quad \text{Así, } 100 \equiv 2 \text{ (mód 7), } 35 \equiv 2 \text{ (mód 11).}$$

La ventaja de esta notación es que recuerda la forma en que escribimos las ecuaciones algebraicas, recoge el concepto algo ilusorio de la divisibilidad aritmética en una breve notación y sugiere que intentamos llevar a la Aritmética, (que es mucho más difícil que el Álgebra), algunas de las manipulaciones que conducen a interesantes resultados. Por ejemplo, podemos ”sumar" ecuaciones y encontramos que las congruencias pueden también ser "sumadas", con tal de que el módulo sea el mismo en todas, para obtener otras congruencias.
Llamemos x a un número desconocido y r y m a determinados números de los cuales r no es divisible por m. ¿Existe un número x tal que x^2 º r (mód m)?
Si existe, r se llama un *resto cuadrático de m*; si no, un *no-resto* cua*drático de m*.
Si r es un resto cuadrático de m, debe ser posible encontrar al menos un x cuyo cuadrado, cuando se divida por m, deje de resto r; si r es un no-resto cuadrático de m, no hay ningún x cuyo cuadrado, dividido por m, dé r de resto. Estas son consecuencias inmediatas de las definiciones precedentes.
Ilustremos el caso: ¿es 13 un resto cuadrático de 17? Si lo es, debe ser posible la *congruencia*.

$$x^2 \text{ º } 13 \text{ (mód 17)}$$

Ensayando 1, 2, 3... encontraremos que x = 8, 25, 42, 59,... son soluciones (81 = 64 = 3 * 17 + 13; 25^2 = 625 = 36 * 17 + 13; etc.), de modo que 13 *es* un resto cuadrático de 17. Pero la congruencia $x^2 \equiv 5$ (mód 17) no tiene solución, de modo que 5 es un no-resto cuadrático de 17.
Es ahora natural preguntarse ¿cuáles son los restos y no-restos cuadráticos de un número dado m? Suponiendo $x^2 \equiv r$ (mód m), ¿qué números r pueden aparecer y qué números r no pueden aparecer cuando x toma todos los valores 1, 2, 3 ... ?
Sin gran dificultad puede demostrarse que esto es suficiente para responder a la cuestión cuando r *y* m son primos. Veamos el problema: si p es un primo *dado* ¿qué primo q hará la congruencia x^2 º q (mód p) soluble? Esto es preguntar mucho en el estado actual de la Aritmética. Sin embargo, la situación no es totalmente desesperada.
Existe una bella "reciprocidad" entre el par de congruencias

$$x^2 \equiv q \text{ (mód } p\text{)}, \; x^2 \equiv p \text{ (mód } q\text{)}$$

en la que tanto p como q son primos; ambas congruencias son *posibles* o *ambas* son *imposibles, a no ser que tanto p como q* den el resto 3 cuando se dividen por cuatro, en cuyo caso *una* de las congruencias *es* posible y la *otra* no. Esta es la ley de reciprocidad cuadrática.
No era fácil de probar. En efecto, esto desconcertó a Euler y Legendre. Gauss dio la primera prueba teniendo 19 años. Como esta reciprocidad es de importancia fundamental en la Aritmética superior y en muchas partes del Álgebra, Gauss meditó durante muchos años tratando de encontrar la solución, hasta que encontró seis pruebas diferentes, una de las cuales depende de la construcción con regla y compás de los polígonos regulares.
Un ejemplo numérico aclarará el enunciado de la ley. Primero consideremos $p = 5$, $q = 13$. Puesto que 5 y 13 dan 1 de resto al ser divididos por 4, tanto $x^2 \equiv 13$ (mód 5) como $x^2 \equiv 5$ (mód 13) deben

tener solución o no la tiene ninguna de estas dos congruencias. Lo último es lo que ocurre para este par. Tanto $p = 13$ como $q = 17$, dejan el resto 1 al ser divididos por 4, y tendremos $x^2 \equiv 17$ (mód 13), $x^2 \equiv 13$ (mód 17) y *ambas* o *ninguna* deben ser solubles. En este caso ocurre lo primero: la primera congruencia tiene las soluciones $x = 2, 15, 28$ ... - la segunda tiene las soluciones $x = 8, 25, 42$...
Queda por ver ahora el caso en que *tanto p como q* den el resto 3 al dividirlos por 4. Consideremos $p = 11$, $q = 19$. De acuerdo con la ley, *precisamente una* de las congruencias $x^2 \equiv 19$ (mód 11), $x^2 \equiv 11$ (mód 19) debe tener solución. La primera congruencia no tiene solución; la segunda tiene las soluciones 7, 26, 45...

El simple descubrimiento de tal ley fue una notable adquisición. Quien intente demostrar lo que Gauss demostró teniendo 19 años, comprenderá que era algo más que un simple aficionado a la Matemática.

Cuando Gauss abandonó el Colegio Carolino, en octubre de 1795, teniendo 18 años, para ingresar en la Universidad de Göttingen, aun no había decidido si como objetivo de su vida elegiría la Matemática o la Filología. Había ya inventado (cuando tenía 18 años), el método de los "mínimos cuadrados", que en la actualidad es indispensable en las mediciones geodésicas, en la reducción de las observaciones y en todos los estudios donde el valor "más probable" de alguna cosa que se está midiendo debe ser inferida de gran número de mediciones. Gauss participó de este honor con Legendre, quien publicó el método independientemente de Gauss en el año 1806. Este trabajo marca el comienzo del interés de Gauss por la teoría de los errores de observación. La ley de Gauss de la distribución normal de los errores y su curva en forma de campana es familiar actualmente a todos los que se ocupan de estadística, desde las mentes más altas, hasta los inescrupulosos manipuladores de los mercados.

El 30 de marzo de 1796 marca el punto decisivo en la carrera de Gauss. Ese día, exactamente un mes antes de que cumpliera 20 años, Gauss se decidió resueltamente en favor de la Matemática. El estudio de las lenguas siguió siendo una de sus diversiones, pero la filología perdió a Gauss para siempre en aquel día memorable de marzo.

Como ya hemos dicho en el capítulo sobre Fermat, el polígono regular de 17 lados fue el que indujo a Gauss a cruzar su Rubicón. El mismo día Gauss comenzó a escribir su diario científico *(Notizenjournal). É*ste es uno de los documentos más preciosos de la historia de la Matemática. La primera anotación recoge su gran descubrimiento.

El diario no tuvo circulación científica hasta 1898, cuarenta y tres años después de la muerte de Gauss, cuando la Sociedad Real de Göttingen pidió al nieto de Gauss prestase el libro para su estudio crítico. Se compone de diecinueve páginas en octavo pequeño y contiene 146 exposiciones extraordinariamente breves de descubrimientos o resultados de cálculos, la última de las cuales está fechada el 9 de julio de 1814. Un facsímil fue publicado en 1917, en el décimo volumen (parte I) de las obras completas de Gauss, en unión de un detenido análisis de su contenido hecho por diversos especialistas. En este libro no fueron recogidos todos los descubrimientos de Gauss en el período prolífico de 1796 a 1814. Pero muchos de los anotados bastarían para establecer la prioridad de Gauss en campos, funciones elípticas, por ejemplo, donde algunos de sus contemporáneos se niegan a creer que Gauss les precediera. (Recuérdese que Gauss había nacido en 1777).

Muchos hallazgos que quedaron enterrados durante años o décadas en este diario habrían labrado media docena de grandes reputaciones de haber sido publicados rápidamente. Algunos jamás se hicieron públicos durante la vida de Gauss, y nunca pretendió la prioridad cuando otros autores se le anticiparon. Estas anticipaciones no se referían a cosas triviales. Algunas de ellas constituían descubrimientos esenciales de la Matemática del siglo XIX.

Algunas de las anotaciones indican que el diario era cosa estrictamente privada de su autor. Así, el 10 de julio de 1796, la anotación dice

$$\text{EYPHKA! núm} = \Delta + \Delta + \Delta$$

Después del exultante "Eureka!" de Arquímedes, afirma que todo número entero positivo es la suma de tres números triangulares, tal número es uno de la sucesión 0, 1, 3, 6, 10, 15,... donde cada uno (después del 0) es de la forma $1/2^n(n + 1)$, siendo n un número entero positivo. Otra forma de decir lo mismo es que todo número de la forma 8n + 3 es una suma de tres cuadrados impares: $3 = 1^2 + 1^2 + 1^2$; $11 = 1 + 1 + 3^2$; $19 = 1^2 + 3^2 + 3^2$, etc. No es fácil demostrar esto de un modo casual.

Menos inteligible es la misteriosa anotación del 11 de octubre de 1796, "Vicimus GEGAN". ¿A qué dragón venció Gauss esa vez? ¿A qué gigante sometió el 8 de abril de 1799 cuando encierra las palabras REV. GALEN en un rectángulo aislado? Aunque la significación de esas palabras se haya perdido para siempre, las restantes 144 anotaciones son en su mayor parte bastante claras. Una en particular tiene extraordinaria importancia, como veremos al ocuparnos de Abel y Jacobi. La anotación del 19 de marzo de 1797 muestra que Gauss había ya descubierto la doble periodicidad de ciertas funciones elípticas. Tenía entonces veinte años. Además, otra anotación muestra que Gauss reconoció la doble periodicidad en el caso general. Este descubrimiento, por sí solo, de haber sido publicado, podría haberle hecho famoso inmediatamente, pero jamás lo publicó.

¿Por qué Gauss reservaba las grandes cosas que descubría? Esto es más fácil de explicar que su genio, si aceptamos sus sencillos juicios, que ahora mencionaremos. Una versión más romántica es la recogida por W. W. R. Ball, en su conocida historia de la Matemática. Según este autor, Gauss sometió su primera obra maestra, las *Disquisitiones Arithmeticae* a la Academia Francesa de Ciencias, que la rechazó despectivamente. Esta humillación inmerecida hirió a Gauss tan profundamente que desde entonces resolvió publicar tan sólo aquello que podía ser admitido sin crítica, tanto en su fondo como en su forma. Pero ésta versión fue desechada para siempre en 1935, cuando la Academia Francesa, después de un detenido estudio de los informes, demostró que las *Disquisitiones* nunca fueron presentadas a la Academia, y menos rechazadas.

Hablando de sí mismo, Gauss dice que emprendía sus estudios científicos tan sólo como una respuesta a los impulsos más profundos de la naturaleza, y para él era algo completamente secundario publicarlos para el conocimiento de los demás. Otro juicio de Gauss, comunicado en una ocasión a un amigo, explica tanto su diario como la lentitud en la publicación. Gauss afirmaba que cuando tenía veinte años era tal la cantidad de nuevas ideas que pasaban por su mente, que difícilmente podía recogerlas, y sólo disponía para ello de brevísimo tiempo. El diario contiene tan sólo los juicios breves finales de los resultados de complicadas investigaciones, algunas de las cuales le ocuparon durante semanas. Cuando siendo joven contemplaba la serie de pruebas sintéticas que habían encadenado las inspiraciones de Arquímedes y Newton, Gauss resolvió seguir su gran ejemplo, y tan sólo dejar obras de arte perfectas y completas a las que nada pudiera ser añadido y a la que nada pudiera ser restado, sin desfigurar el conjunto. La obra por sí debe ser completa, sencilla y convincente, sin que pueda encontrarse signo alguno que indique el trabajo que ha costado lograrla. Una catedral, decía, no es una catedral hasta que ha desaparecido de la vista el último andamio. Trabajando con este ideal, Gauss prefería pulir una obra maestra varias veces, en vez de publicar los amplios esquemas de muchas de ellas, como pudo fácilmente hacer. Su sello, un árbol con pocos frutos, lleva el lema *Pauca sed matura*. (Pocos, pero maduros).

Los frutos de este esfuerzo hacia la perfección eran en efectos maduros, pero no siempre digeribles. Todas las huellas de los pasos para llegar a la meta habían sido borradas, y no fue fácil para los continuadores de Gauss descubrir el camino que siguió. En consecuencia, algunas de sus obras han tenido que esperar a que intérpretes de gran talento las hicieron comprensibles, para que los matemáticos pudieran incorporarlas a su obra y aplicar su significación a problemas no resueltos. Sus propios contemporáneos le pidieron que abandonara su frígida perfección con objeto de que la Matemática pudiera avanzar más rápidamente, pero Gauss no hizo caso. Hasta mucho tiempo después de su muerte no se ha sabido hasta qué grado previó y se anticipó, antes del año 1800, a la Matemática del siglo XIX. De haber divulgado lo que sabía es muy posible que la Matemática se hallara medio siglo más allá de donde está. Abel y Jacobi podrían haber comenzado donde Gauss terminó, en lugar de emplear gran parte de su esfuerzo para volver a descubrir cosas que Gauss conocía antes de que ellos nacieran, y los creadores de las Geometrías no euclidianas podrían haber dirigido su genio hacia otras cosas.

Gauss decía de sí mismo que era "todo matemático". Este juicio sería injusto si no se tuviera en cuenta que un "matemático" de aquellos días era lo que hoy sería denominado un físico matemático. En efecto, su segundo lema[2]

> *Thou, nature, art my goddes; to thy laws*
> *My services are bound...,*

resume su vida de devoción a la Matemática y a las ciencias físicas de su época. El calificativo "todo matemático" debe comprenderse únicamente en el sentido de que no dispersó sus talentos magníficos en otros campos donde podría haber obtenido abundante cosecha, como hizo Leibniz, sino que cultivó su máximo talento a la perfección.

Los tres años (octubre 1795-septiembre 1798) en la Universidad de Göttingen fueron los más prolíficos de la vida de Gauss. Gracias a la generosidad del Duque Ferdinand, el joven no se vio abrumado por dificultades económicas. Se entregó a su obra, teniendo pocos amigos. Uno de ellos, Wolfgang Bolyai, "el espíritu más raro que he conocido", según le califica Gauss, fue su amigo durante toda la vida. El curso de esta amistad y su importancia en la historia de las Geometrías no euclidianas es demasiado largo para que pueda ser referido en este lugar. Johann, hijo de Wolfgang, tuvo que seguir prácticamente la misma senda que Gauss siguió para la creación de una Geometría no euclidiana, ignorando completamente que amigos de su padre le había precedido. Las ideas que inundaron a Gauss desde que tenía 17 años fueron ahora recogidas en parte y puestas en orden. Desde 1795 había estado meditando en una gran obra acerca de la teoría de números, que tomó forma definida y prácticamente fue terminada en 1798, constituyendo las *Disquisitiones Arithmeticae*.

Para familiarizarse con lo que había sido hecho en Aritmética superior, y para estar seguro de que prestaba debida atención a sus predecesores, Gauss acudió a la Universidad de Helmstedt, donde existía una excelente biblioteca matemática, en septiembre de 1798. Fue cordialmente recibido por el bibliotecario y profesor de Matemática Johann Friedrich Pfaff (1765-1825) en cuya casa se alojó.

---

[2] Shakespeare, *El Rey Lear*, Acto I, escena II, 1-2, con el cambio esencial de "ley" por "leyes".

Gauss y Pfaff fueron excelentes amigos, aunque la familia Pfaff pocas veces vio a su huésped. Pfaff pensaba que era su deber cuidarse de que su joven amigo hiciera algún ejercicio y él y Gauss paseaban juntos durante la tarde hablando de Matemática. Como Gauss no sólo era modesto, sino también reservado acerca de su propia obra, Pfaff probablemente no aprendió tanto como hubiera podido de ser diferente el carácter de Gauss. Este admiraba mucho al profesor, que era entonces el mejor matemático de Alemania, no sólo por su excelente labor, sino por su carácter sencillo y abierto. Había un tipo de hombres por quien Gauss sentía aversión y desprecio. Los que no reconocen sus fracasos cuando saben que se han equivocado.

Gauss permaneció en Brunswick durante el otoño de 1798 (entonces tenía 21 años) realizando tan sólo algunos viajes a Helmstedt para dar los toques finales a sus *Disquisitiones*. Esperaba su rápida publicación, pero el libro no fue impreso hasta septiembre de 1801 debido a las dificultades puestas por un editor de Leipzig. En gratitud por el apoyo que el duque Ferdinando le había prestado, dedicó su libro al *Serenissimo Principi ac Domino Carolo Guilielmo Ferdinando.*

Si un protector generoso merece el homenaje de su protegido, Ferdinando merecía el de Gauss. Cuando el joven genio se hallaba preocupado por su futuro, después de dejar Göttingen, intentó infructuosamente tener discípulos, el duque acudió a salvarle. Pagó la impresión de su disertación doctoral (Universidad de Helmstedt, 1799), y le concedió una modesta pensión, que le permitió continuar sus trabajos científicos sin verse perseguido por la pobreza. "Vuestra bondad, dice Gauss en su dedicatoria, me han libertado de cualquier otra responsabilidad, permitiéndome aceptar ésta exclusivamente".

Antes de comentar las *Disquisitiones* examinaremos la disertación que valió a Gauss su grado de doctor *in absentia* por la Universidad de Helmstedt, en 1799*: Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus revolvi posse.* (Una nueva prueba de que toda función algebraica racional entera de una variable puede ser descompuesta en factores reales de primero o segundo grado).

Existe sólo un error en esta obra esencial de Álgebra. Las primeras palabras del título implican que Gauss ha añadido simplemente una nueva prueba a las ya conocidas. Debía haber omitido la palabra "nova". La suya era la primera prueba, como veremos más tarde. Alguien antes que él publicó lo que se suponía eran demostraciones de este teorema, de ordinario llamado el teorema fundamental del Álgebra, pero ninguno lo consiguió. Con su rigor lógico y matemático, Gauss se esforzó en obtener una *prueba*, *y* obtuvo la primera. Otro enunciado equivalente del teorema dice que toda ecuación algebraica con una incógnita tiene una raíz, afirmación que los principiantes consideran como verdadera, sin tener la más remota idea de lo que significa.

Si un loco garrapateara una serie de símbolos matemáticos, no podría decirse que los signos escritos, significaran algo, debido a que el ojo inexperto no pudiera distinguirlos de los de las Matemáticas superiores. Esta suposición sería tan caprichosa como creer que tiene alguna significación afirmar que toda ecuación algebraica tiene una raíz, si no, decimos qué *clase* de raíz tiene la ecuación. Vagamente sentimos que un *número* satisfará la ecuación, pero no sabemos más.

Gauss precisó este sentimiento, demostrando que todas las raíces de cualquier ecuación algebraica son "números" de la forma $a + bi$, donde a, b son números reales (los números que corresponden a las distancias, positiva, cero o negativa, medidas desde un punto fijo 0 sobre una línea recta determinada, como el eje de las x en la Geometría de Descartes) e i la raíz cuadrada de -1. El nuevo tipo de "número" $a + bi$ se llama *número complejo.*

Incidentalmente Gauss fue uno de los primeros en dar una explicación coherente de los números complejos y en interpretarlos como designando los puntos de un plano, tal como se hace hoy en los manuales elementales de Álgebra.

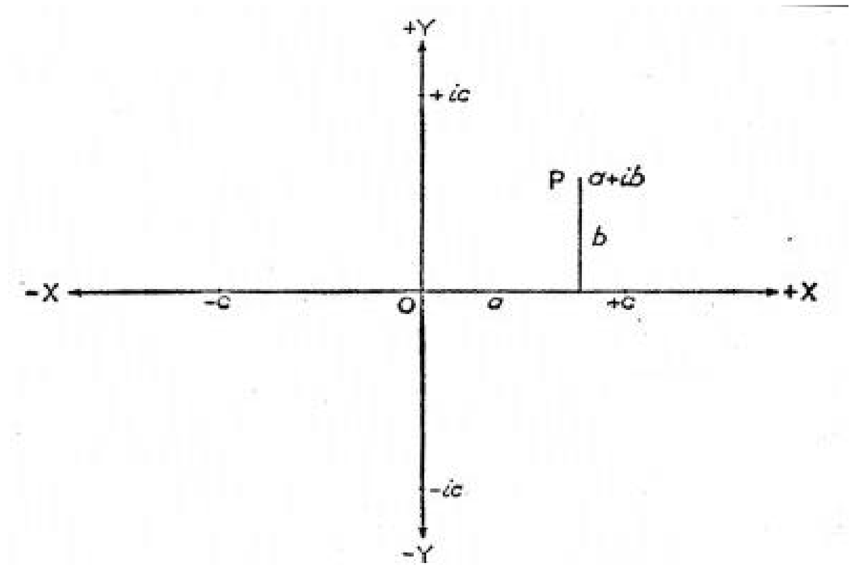

Figura 1

Las coordenadas cartesianas de P son (a,b); el punto P se denomina también $a + bi$. Así, a cualquier punto del plano corresponde precisamente un número complejo; los números que corresponden a los puntos sobre XOX son "reales", los que están sobre YOY, "imaginarios puros" (todos son del tipo ic**,** donde c es un número real).

La palabra "imaginario" es la gran calamidad algebraica, pero está demasiado arraigada para que pueda eliminarse. Jamás debería haber sido usada. Los libros de Álgebra elemental dan una sencilla interpretación de los números imaginarios considerándolos como rotaciones. Si interpretamos la multiplicación $i * c$, donde c es real, como una rotación alrededor de 0 del segmento Oc siguiendo un ángulo recto, Oc gira hasta OY; otra multiplicación por i, o sea $i * i * c$, hace girar Oc otro ángulo recto, y de aquí que el efecto total es girar Oc dos ángulos rectos, de modo que $+ Oc$ se convierte en $-Oc$. Así como una operación, la multiplicación por $i * i$**,** tiene el mismo efecto que la multiplicación por -1; la multiplicación por i tiene el mismo efecto que una rotación de un ángulo recto, y estas interpretaciones (como justamente hemos visto) son consecuentes. Si queremos podemos ahora escribir $i * i = - 1$ en las operaciones, o $i^2 = - 1$; de modo que la operación de la rotación en un ángulo recto es simbolizada por $\sqrt{-1}$.

Como es natural, todo esto no prueba nada. No significa demostración alguna. *No hay nada que deba ser probado.* Asignamos a los símbolos y operaciones del Álgebra *una situación siempre que* no sea contradictoria. Aunque la *interpretación* por medio de las rotaciones nada *prueba*, sugiere que nadie debe caer en un. estado de mística admiración acerca de los más llamados números "imaginarios". Para otros detalles puede consultarse cualquier manual de Álgebra elemental.

Para Gauss, el teorema referente a que toda ecuación algebraica tiene una raíz, explicado en el justo sentido, tenia tanta importancia, que dio cuatro pruebas diferentes, la última teniendo 70 años. Actualmente, algunos transfieren el teorema desde el Álgebra (que se limita a procesos que pueden ser llevados a través de un número finito de pasos) al Análisis. El mismo Gauss *aceptó* que la gráfica de un polinomio es una curva continua, y que si el polinomio es de grado impar, la gráfica debe cortar el eje al menos una vez. Para cualquier principiante en Álgebra esto es evidente. Pero en la actualidad *no hay evidencia* sin pruebas, y los intentos para probarlo han tropezado con las dificultades relacionadas con la continuidad y el infinito. Las raíces de una ecuación tan sencilla como $x^2 + 2 = 0$ no pueden ser computadas exactamente en un número finito de pasos. Mencionaremos más detalles al ocuparnos de Kronecker, y seguiremos ahora con las *Disquisitiones Arith*meticae.

Las *Disquisitiones* fueron la primera obra maestra de Gauss, siendo considerada por algunos como la más importante. Constituyeron su despedida de la Matemática pura. Después de su publicación en 1801 (Gauss tenía 24 años), su actividad abarcó la astronomía, la geodesia *y* el electromagnetismo, tanto en sus aspectos teóricos como en los prácticos. Pero la Aritmética fue su gran amor, y siempre se lamentó de no haber tenido tiempo para escribir el segundo volumen que planeó siendo joven. El libro tiene siete secciones. Debía haber tenido ocho, pero la octava fue omitida para disminuir el costo de la impresión.

La frase que inicia el prefacio describe el objeto general del libro "Las investigaciones contenidas en esta obra pertenecen a aquella parte de la Matemática que se refiere a los números enteros, siendo siempre excluidos los fraccionarios y los irracionales".

Las tres primeras secciones tratan de la teoría de congruencias, y en ellas se hace especialmente una completa exposición de la congruencia

binomia $x^n \equiv A \pmod{p}$,

donde los números enteros n, A son arbitrarios y p es primo; el número enteró desconocido es x. Esta bella teoría *aritmética* tiene muchas semejanzas con la teoría *algebraica* correspondiente de la *ecuación* binomia $x^n = A$, pero en sus partes propiamente aritméticas es incomparablemente más rica y más difícil que el Álgebra que no ofrece analogías con la Aritmética.

En la cuarta sección Gauss desarrolló la teoría de restos cuadráticos. Aquí se encuentra la primera *demostración* publicada de la ley de reciprocidad cuadrática. La prueba es una asombrosa aplicación de la inducción matemática, y una muestra de esa ingeniosa lógica que se encontrará en otros lugares de su obra.

En la quinta sección se presenta desde el punto de vista aritmético la teoría de las formas cuadráticas binarias, acompañada de una discusión de las formas cuadráticas ternarias, necesaria para completar la teoría binaria. La ley de reciprocidad cuadrática desempeña un papel fundamental en estas difíciles cuestiones. Para las primeras formas citadas el problema general es encontrar la solución en números enteros x, y de la ecuación indeterminada

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = m,$$

donde a, b, c, m son números enteros cualesquiera; para la segunda, las soluciones en números enteros x, y, de

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dxz + 2eyz + fz^2 = m,$$

donde *a, b, c, d, e, f, m* son números enteros cualesquiera, constituyen el tema de la investigación. Una cuestión al parecer sencilla, pero en realidad difícil, es imponer las limitaciones necesarias y suficientes sobre *a, c, f, m* que aseguren la existencia de una solución en números enteros *x, y, z* de la ecuación indeterminada

$$ax^2 + cy^2 + fz^2 = m.$$

La sexta sección aplica la teoría precedente a varios casos especiales, por ejemplo, las soluciones, en números enteros *x, y* de $mx^2 + ny^2 = A$, donde *m, n, A* son números enteros cualesquiera.
En la séptima y última sección, que puede considerarse como la coronación de la obra, Gauss aplica los desarrollos precedentes, particularmente la teoría de las congruencias binómicas, a una maravillosa discusión de la ecuación algebraica

$$x^n = 1,$$

donde *n* es número entero cualquiera, tejiendo en una perfecta trama la Aritmética, el Álgebra y la Geometría. La ecuación $x^n = 1$ es la fórmula algebraica del problema geométrico para construir un polígono regular de *n* lados, o de dividir una circunferencia en *n* partes iguales (consúltese cualquier texto elemental de Álgebra o Trigonometría); la *congruencia aritmética*

$$x^m \equiv 1 \text{ (mód } p),$$

donde *m, p* son números enteros, y *p* es primo, es el hilo que une el Álgebra y la Geometría y da a la trama su sencilla significación. Esta obra de arte es accesible a cualquier estudiante que tenga los conocimientos del Álgebra corriente, pero las *Disquisitiones* no son recomendables a los principiantes. (La exposición concisa de Gauss ha sido modificada por autores posteriores, haciéndola así más fácilmente comprensible).
Algunas partes de esta obra habían sido ya resueltas por otros autores (Fermat, Euler, Lagrange, Legendre, etc.), pero Gauss trató todo el problema desde su punto de vista individual, añadiendo mucho de su cosecha, y dedujo los resultados aislados de sus predecesores partiendo de las fórmulas y soluciones generales de los problemas más importantes. Por ejemplo, el bello resultado de Fermat de que todo número primo de la forma $4n + 1$ es una suma de dos cuadrados, y que tal suma tiene una sola forma, que Fermat demostró por su difícil método del "descenso infinito", se deduce naturalmente de la exposición general de las formas cuadráticas binarias, hecha por Gauss.
"Las *Disquisitiones Arithmeticae* han pasado a la historia", solía decir Gauss en sus últimos años, y tenía razón. Con la publicación de las *Disquisiciones* fue dada una nueva dirección a la Aritmética superior, y la teoría de números, que en los siglos XVII y XVIII había sido una variada agrupación de resultados especiales inconexos, adquirió consistencia, y ascendió a la dignidad de una ciencia matemática semejante al Algebra, al Análisis y a la Geometría.
La obra ha sido llamada un "libro de siete sellos". Su lectura es difícil hasta para los especialistas, pero los tesoros que contiene, y en parte oculta en sus concisas demostraciones sintéticas, son ahora accesibles a todo el que desee participar de ellos, gracias especialmente a los trabajos del amigo y

discípulo de Gauss, Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), quien fue el primero que rompió los siete sellos.

Jueces competentes reconocieron la obra maestra inmediatamente. Parece que Legendre[3] hizo al principio escasa justicia a Gauss. Pero en el prefacio a la segunda edición de su tratado sobre la teoría de números (1808), que en gran parte fue desplazado por las *Disquisitiones*, se muestra entusiasta. Lagrange también lo alabó sin reservas. Escribiendo a Gauss el 31 de mayo de 1804, dice: "Vuestras *Disquisitiones os* han elevado rápidamente a la categoría de los primeros matemáticos, y considero que la última sección contiene el más bello descubrimiento analítico que ha sido hecho desde hace largo tiempo..., Creo, señor, que nadie aplaude más sinceramente vuestros triunfos que yo".

Debido a la clásica perfección de su estilo, las *Disquisitiones* eran de asimilación algo lenta, y cuando, al fin, algunos jóvenes de talento comenzaron a estudiar la obra profundamente, no pudieron adquirir ejemplares a consecuencia de la quiebra del editor. El mismo Eisenstein, discípulo favorito de Gauss, jamás tuvo un ejemplar. Dirichlet fue más afortunado. Su ejemplar le acompañó en todos sus viajes, y dormía colocándolo bajo su almohada. Antes de acostarse luchaba con algún párrafo difícil, abrigando la esperanza, frecuentemente cumplida, de que al despertarse durante la noche y volver a leerlo, podría interpretarlo. Se debe a Dirichlet el maravilloso teorema mencionado al ocuparnos de Fermat de que toda progresión aritmética

$$a, a + b, a + 2b, a + 3b, a + 4b,...,$$

en la cual a, b son números enteros que no tienen ningún divisor común mayor que 1, contiene infinitos números primos. Esto fue probado por el Análisis, cosa milagrosa, pues el teorema se refiere a números enteros, mientras que el Análisis se ocupa de lo continuo, lo *no-entero*.

Dirichlet hizo en Matemática algo más que amplificar las Disqui*sitiones*, pero no tenemos espacio para exponer su vida. Por desgracia, tampoco disponemos de espacio para Eisenstein, uno de los jóvenes más brillantes de los primeros años del siglo XIX, de quien se dice que Gauss afirmó: "Ha habido tres matemáticos que marcan épocas. Arquímedes, Newton y Eisenstein". Si Gauss dijo esto alguna vez (es imposible comprobarlo), seguramente merece que se le tenga en cuenta, pues Gauss era hombre que no hablaba con ligereza.

Antes de dar por terminado este campo de actividades de Gauss, podemos preguntarnos por qué jamás se dedicó al último teorema de Fermat. El mismo nos da la respuesta. La Academia de París propuso, en 1816, como premio para el período 1816-18, la prueba (o la negación) del teorema. El 7 de marzo de 1816 Olbers, desde Bremen, incitó a Gauss a presentarse: "Me parece justo, querido Gauss, que os ocupéis, de ello"; pero el "querido Gauss" resistió a la tentación. Al contestar, dos meses más tarde, expuso su opinión acerca del último teorema de Fermat. "Os estoy muy obligado por vuestras noticias respecto al premio en París pero confieso que el teorema de Fermat como proposición aislada tiene muy escaso interés para mí, pues fácilmente puedo encontrar una multitud de proposiciones semejantes que no es posible probar ni desechar".

Gauss sigue diciendo que la cuestión le ha llevado a recordar algunas de sus viejas ideas que tienen aplicación en la Aritmética superior. Sin duda se refiere a la teoría de los números algebraicos (aludida

[3] Adrien-Marie Legendre (1752-1833). Consideraciones de espacio nos impiden ocuparnos de su vida. Gran parte de su obra ha sido absorbida o elaborada por matemáticos más jóvenes.

en capítulos anteriores), que Kummer, Dedekind y Kronecker desarrollaron independientemente. Pero la teoría en que Gauss pensaba es una de esas cosas, según declara, donde es imposible prever qué progresos se harán hacia una meta distante, que sólo se aprecia confusamente a través de la oscuridad. Para triunfar en una tarea tan difícil era necesario ser guiado por una buena estrella, y las circunstancias en que entonces se hallaba Gauss, con sus numerosas ocupaciones, no eran tan adecuadas para meditaciones de ese estilo, como lo habían sido "en los afortunados años 1796-1798, cuando estableció los puntos principales de las *Disquisitiones Arithmeticae*. Aun estoy convencido de que si soy tan feliz como espero, y consigo dar algunos de los pasos principales en esa teoría, el teorema de Fermat aparecerá tan sólo como uno de los corolarios menos interesantes".

Probablemente, todos los matemáticos lamentarán actualmente que Gauss se desviara de su camino a través de la oscuridad, por "un par de masas de polvo que llamamos planetas", según sus propias palabras, que brillaron inesperadamente en el firmamento de la noche y le extraviaron. Matemáticos de menos categoría que Gauss, por ejemplo Laplace- pudieron haber hecho todo lo que Gauss hizo en el cálculo de las órbitas de Ceres y Pallas, no obstante tratarse de Newton, pertenecía a los más difíciles de la astronomía matemática. Pero el brillante triunfo de Gauss en estas cuestiones, le llevaron a ser considerado inmediatamente como el primer matemático de Europa, proporcionándole una posición cómoda, donde pudo trabajar en relativa paz. Esas masas arrugadas de polvo fueron, por tanto, sus estrellas felices.

La segunda gran fase de la carrera de Gauss comienza el primer día del siglo XIX, día que debe recordarse con letra roja en la historia de la filosofía y de la astronomía. Desde que en 1781 Sir William Herschel (1738-1822), descubrió el planeta Urano, elevando el número de planetas conocidos hasta siete, número satisfactorio filosóficamente, los astrónomos habían estado buscando activamente otros miembros de la familia solar, cuya existencia era esperable según la ley de Bode, entre las órbitas de Marte y Júpiter. La busca no fue fructífera hasta que Giuseppe Piazzi (1746-1826), de Palermo en el primer día del siglo XIX, observó lo que al principio consideró erróneamente como un pequeño cometa que se acercaba al Sol, pero que luego fue reconocido como un nuevo planeta, más tarde llamado Ceres, el primero del enjambre de planetas menores en la actualidad conocidos.

Por una de las más irónicas sentencias pronunciadas por el destino cuando litiga el hecho frente a la especulación, el descubrimiento de Ceres coincidió con la publicación, por parte del famoso filósofo Georg Wilhelm Friedrich Hegel (1770-1831), de un sarcástico ataque a los astrónomos por dedicarse a buscar un octavo planeta. Si prestaran alguna atención a la filosofía, afirmaba Hegel, podrían darse cuenta inmediatamente de que debe haber precisamente siete planetas, ni más ni menos. Su búsqueda, por tanto, era una estúpida pérdida de tiempo. Sin duda, este ligero error de Hegel ha sido satisfactoriamente explicado por sus discípulos, pero nada han dicho de los centenares de planetas menores que se burlaron de su edicto joviano.

Tiene interés mencionar en este lugar el pensamiento de Gauss respecto a los filósofos que se mezclan en los problemas científicos sin comprenderlos. Se refería en particular a los filósofos que invaden los fundamentos de la Matemática sin haberse dedicado a ningún problema matemático. En cambio, Bertrand A. W. Russell (1872-1872), Alfred North Whitehead (1861-1861) y David Hilbert (1862-1942), en nuestra propia época, han hecho notables contribuciones a la filosofía de la Matemática, pero estos hombres son matemáticos.

Escribiendo a su amigo Schumacher el 1° de noviembre de 1844 Gauss dice: "Veréis las mismas cosas [incompetencia matemática] en los filósofos contemporáneos Schelling, Hegel, Nees Essenbeck y sus continuadores. ¿No os ponen los pelos de punta con sus definiciones? Leed en la historia de la filosofía antigua lo que los hombres cumbres de aquella época, Platón y otros (exceptúo a Aristóteles), dan, en forma de explicaciones. Pero hasta en el caso de Kant no ocurre lo mismo. En mi opinión, su distinción entre proposiciones analíticas y sintéticas es una de esas cosas que o son una trivialidad o son falsas". Cuando escribía estas palabras (1844), hacía ya tiempo que Gauss estaba en completa posesión de una Geometría no euclidiana, suficiente refutación a algunas de las cosas que Kant decía acerca del espacio y de la Geometría, y podía haber sido más despectivo.

No debe deducirse de este ejemplo aislado referente a la técnica matemática pura que Gauss no apreciara la filosofía. Todos los progresos filosóficos le llenaban de entusiasmo, aunque muchas veces desaprobara los medios en cuya virtud habían sido logrados. "Son problemas, decía una vez, cuya solución me parece de mucho mayor importancia que la de los problemas matemáticos; por ejemplo, los que se refieren a la ética, a nuestra relación con Dios, o a nuestro destino y nuestro futuro; pero su solución se halla más allá de nosotros, y completamente fuera de los límites de la ciencia.

Ceres constituyó un desastre para la Matemática. Para comprender por qué este problema fue considerado tan seriamente por Gauss, debemos recordar que la colosal figura de Newton, muerto hacía 70 años, aun proyectaba su sombra sobre la Matemática en 1801. Los "grandes" matemáticos de la época estaban dedicados, como ocurría con Laplace, a completar el edificio newtoniano de la mecánica celeste. La Matemática se hallaba aún confundida con la física matemática y la astronomía matemática. La visión de la Matemática como una ciencia autónoma, que Arquímedes tuvo en el siglo III antes de Jesucristo, se había desvanecido en el esplendor de Newton, y sólo el joven Gauss pudo recobrarla. Pero esa insignificante masa de polvo, el pequeño planeta Ceres, sedujo su talento sin paralelo cuando tenía 24 años y atravesaba aceleradamente por aquel desierto, que había de ser luego el imperio de la Matemática moderna.

Ceres no es el único culpable. Las magníficas dotes para la Aritmética mental puestas de manifiesto en las *Disquisitiones Arithmeticae*, desempeñaron también un papel fatal en la tragedia. Sus amigos **y** su padre estaban demasiado impacientes con el joven Gauss, al no encontrar éste una posición lucrativa. El Duque había hecho posible su educación, y ni siquiera conocía la naturaleza de la obra que había hecho de este hombre un solitario silencioso. Ahora, en el alborear del nuevo siglo, se presentaba la oportunidad para Gauss.

Había sido descubierto un nuevo planeta en una posición que hacía extraordinariamente difícil observarlo. Calcular su órbita partiendo de los escasos datos disponibles, era una tarea a la que podía haberse dedicado el propio Laplace. Newton declaró que tales problemas se contaban entre los más difíciles de la astronomía matemática. La simple Aritmética necesaria para establecer con seguridad suficiente una órbita que permitiera hallar a Ceres en su recorrido alrededor del Sol, no hay duda de que habría destrozado las máquinas de calcular actualmente empleadas; pero para aquel joven cuya memoria sobrehumana le permitía pasarse sin la tabla de logaritmos cuando tenía prisa o cuando su pereza no le dejaba buscarla, toda esta interminable Aritmética, *logística, no aritmética*, era un juego de niños.

¿Por qué no entregarse a su vicio favorito? Calcular como jamás se había calculado antes, encontrar la difícil órbita para deleite y admiración de los dictadores de la moda matemática, y hacer posible en cualquier momento, a los pacientes astrónomos, el descubrimiento de Ceres en el lugar donde la ley newtoniana de la gravitación decretaba que debía encontrarse, si la ley era, en efecto, una ley natural. ¿Por qué no dedicarse a esta tarea, volviendo la espalda a la visión insustancial de Arquímedes, y olvidando sus descubrimientos jamás superados, que esperaban su desarrollo en las páginas de su diario? ¿Por qué no ser popular? La generosidad del Duque había herido el orgullo del joven en su lugar más secreto; el honor, el reconocimiento, el ser considerado como un "gran" matemático a la manera de la época con su probable secuela de independencia económica. Todo esto se encontraba ahora a su alcance. Gauss, el dios matemático de todas las épocas, podía alargar su mano para recoger los frutos de una fama fácil en su propia generación.

Los sublimes sueños, cuyos fugitivos destellos había recogido durante 20 años el joven Gauss en su diario, iban siendo olvidados. Ceres se iba encontrando precisamente donde el maravilloso ingenio y los detallados cálculos del joven Gauss habían predicho. Pallas, Vesta y Juno, insignificantes planetas hermanos del diminuto Ceres, eran rápidamente observados por los telescopios desafiando a Hegel, y sus órbitas correspondían a los cálculos correctos de Gauss. Los cálculos que Euler habría tardado tres días en realizar -se ha dicho que uno de ellos fue la causa de su ceguera- eran ahora simples ejercicios de escasas horas. Gauss prescribió el *método*, la rutina. La mayor parte de su tiempo, durante casi 20 años, fue dedicada a los cálculos astronómicos.

Pero esta labor sin brillo no esterilizó el genio creador de Gauss. En 1809 publicó su segunda obra maestra *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*. (Teoría del movimiento de los cuerpos celestes que giran alrededor del Sol siguiendo secciones cónicas) donde hace una exposición detenida de la determinación de las órbitas planetarias y cometarias basándose en los datos de observación, abarcando el difícil análisis de las perturbaciones y estableciendo la ley que durante muchos años habría de dominar en los cálculos astronómicos y en la astronomía práctica. Era una gran obra, pero no tan grande como la que Gauss hubiera sido capaz de realizar siguiendo las anotaciones olvidadas en su diario. La *Theoria motus* no añadió ningún descubrimiento esencial a la *Matemática.*

El reconocimiento del valor de Gauss tuvo lugar con rapidez espectacular después del redescubrimiento de Ceres, y Laplace consideró al joven matemático a la par de él o quizá superior. Algún tiempo más tarde, cuando el Barón Alexander von Humboldt (1769-1859), famoso viajero y amante de las ciencias, preguntó a Laplace quién era el matemático más grande de Alemania, Laplace replicó: "Pfaff ". “Y Gauss?", preguntó asombrado von Humboldt, quien apoyaba a éste para el cargo de Director del Observatorio de Göttingen. "Oh, dijo Laplace, Gauss es el matemático más grande del mundo".

La década siguiente al episodio de Ceres fue rica en venturas y desventuras para Gauss. No careció de detractores, ni siquiera en la primera fase de su carrera. Hombres eminentes ridiculizaron al joven de veinticuatro años por emplear su tiempo en una labor tan inútil como el cálculo de la órbita de un planeta menor. Ceres podía ser la diosa de los campos, pero era indudable que ni un solo grano del cereal que creciera en el nuevo planeta podría venderse en el mercado de Brunswick en la tarde de un sábado. Sin duda tenían razón, pero también le ridiculizaron en la misma forma, treinta años después, cuando estableció los fundamentos de la teoría matemática del electromagnetismo, e inventó el telégrafo eléctrico. Gauss les dejó que se divirtieran con sus burlas, jamás les replicó públicamente, pero en privado se lamentaba que hombres honrados y sacerdotes de la ciencia pudieran ser tan mezquinos. Mientras tanto, continuaba su labor, agradecido a los honores que las sociedades doctas de Europa le dispensaban, pero sin desviarse de su camino.

El Duque de Brunswick aumentó la pensión concedida al joven, haciendo posible su matrimonio (9 de octubre de 1805), cuando tenía veintiocho años, con Juana Osthof, de Brunswick. Escribiendo a su antiguo amigo universitario Wolfgang Bolyai, tres días después de su compromiso, Gauss expresaba su increíble felicidad. "La vida se alza aún ante mí como una eterna primavera, con nuevos y brillantes colores".

De este matrimonio nacieron tres hijos: José, Minna y Luis, el primero de los cuales parece que heredó el talento de su padre para los cálculos mentales. Juana murió el 11 de octubre de 1809, después del nacimiento de Luis, dejando desolado a su joven marido. Su eterna primavera se transformaba en invierno. Aunque volvió a casarse al año siguiente (4 de agosto de 1810), para el bien de sus hijos pequeños, tuvo que pasar mucho tiempo, antes de que Gauss pudiera hablar sin emoción de su primera esposa. Con la segunda mujer, Minna Waldeck, que había sido íntima amiga de la primera, tuvo dos hijos y una hija.

Se cuenta que Gauss no estuvo en buenas relaciones con sus hijos, salvo posiblemente con el inteligente José, que jamás dio a su padre motivo de disgusto. Se afirma que dos de ellos abandonaron el hogar y marcharon a los Estados Unidos. De uno de estos hijos se dice que dejó numerosos descendientes que aún viven en América, pero es imposible añadir algún dato más, salvo que uno de los hijos americanos fue un próspero comerciante en San Luis y que los dos primeros fueron granjeros en Missouri. Con sus hijas, Gauss fue siempre feliz. También se cuenta la leyenda opuesta (garantizada por ancianos cuyo recuerdo de la familia Gauss puede ser considerado como digna de creerse). Dícese que Gauss siempre fue cariñoso con sus hijos, aunque algunos de ellos fueron más bien bruscos y le causaron infinitas angustias. Se puede pensar que el recuerdo de su propio padre tuvo que hacer benévolo a Gauss en el trato con sus hijos.

En 1808 Gauss perdió a su padre, y dos años antes había sufrido una pérdida aún mayor, al morir su protector en circunstancias trágicas.

El Duque Ferdinando no sólo fue un inteligente protector de los jóvenes de talento, y un cordial gobernante, sino también un soldado a quien Federico el Grande estimó mucho por su bravura y genio militar durante la guerra de los 7 años (1756-1763).

Teniendo 70 años, Ferdinando fue nombrado jefe de las fuerzas prusianas, en un desesperado intento para detener a los franceses mandados por Napoleón, después de fracasar la misión del Duque en San Petersburgo, al no poder conseguir la ayuda de Rusia para Alemania. La batalla de Austerlitz (2 de diciembre de 1805) había pasado a la historia, y Prusia se encontraba frente a las fuerzas invasoras. Ferdinando enfrentó a los franceses en su marcha hacia el Saale, en Auerstedt y Jena, siendo desastrosamente derrotado y mortalmente herido. Entonces volvió a su hogar. Napoleón el Grande subía a la escena con su panzuda grandeza. En la época de la derrota de Ferdinando, Napoleón tenía su cuartel general en Halle. Una delegación de Brunswick esperaba al victorioso emperador de todos los franceses para implorar su generosidad en favor del valiente anciano a quien había derrotado. ¿Dejaría a un lado el poderoso emperador la etiqueta militar y permitiría morir en paz a su enemigo caído? El duque, según aseguraban, ya no era peligroso. Estaba moribundo.

Napoleón se hallaba en una mala época, víctima de uno de sus berrinches femeninos. No sólo se negó a la gracia, sino que hizo gala de una brutalidad vulgar e innecesaria. Revelando lo que realmente era, Napoleón subrayó su negativa con una estúpida difamación de su honroso enemigo, cuya capacidad como soldado ridiculizó de un modo histérico. La humillada delegación nada podía hacer para salvar al anciano de la muerte en prisión. No es, pues, sorprendente que estos mismos alemanes, nueve años más tarde, acudieran a iguales métodos en Waterloo, y ayudaran a cavar la fosa del emperador de los franceses.

Gauss vivía, en Brunswick, en aquella época, y su casa se alzaba en la calle principal. Una mañana de los últimos meses de otoño vio pasar ante sus balcones una ambulancia que se alejaba. En ella yacía el duque moribundo para huir a Altona. Con una emoción demasiado profunda para ser expresada en palabras, Gauss contempló la huida de aquel hombre, que había hecho por él más que su padre, para morir oculto como si fuera un criminal perseguido. Nada dijo entonces, ni tampoco más tarde, pero sus amigos se dieron cuenta de que su reserva se hizo mayor, y su continente siempre serio adquirió mayor gravedad. Como Descartes en sus primeros años, Gauss sentía horror a la muerte, y toda su vida se vio atormentada por este angustioso temor. Gauss tenía demasiada vitalidad para morir, o para ser testigo de la muerte. El duque murió en la casa de sus mayores en Altona, el 10 de noviembre de 1806.
Muerto su generoso protector, Gauss necesitó encontrar algún medio para mantener a su familia. No era difícil, pues, la fama del joven matemático había llegado hasta los más lejanos rincones de Europa. San Petersburgo deseaba que fuera el sucesor lógico de Euler, que jamás había sido dignamente reemplazado desde que murió en 1783. En 1807 Gauss recibió un ofrecimiento halagador. Alexander von Humboldt y otros amigos influyentes, deseosos de que Alemania no perdiera al más grande matemático del mundo, consiguieron que Gauss fuera nombrado director del Observatorio de Göttingen, con el privilegio -y deber cuando era necesario- de explicar Matemática a los estudiantes universitarios.

No hay duda de que Gauss hubiera podido obtener una cátedra de Matemática, pero prefirió el Observatorio, que le ofrecía mejores perspectivas para la investigación ininterrumpida. Aunque sería demasiado fuerte decir que Gauss odiaba la enseñanza, la instrucción de los estudiantes comunes no le producía placer alguno, y tan sólo cuando algún gran matemático buscaba sus enseñanzas, Gauss, sentado alrededor de una mesa con sus discípulos revelaba los secretos de sus métodos en sus lecciones perfectamente preparadas. Pero tales incentivos eran por desgracia raros, y la mayor parte de los jóvenes que consumían el tiempo impagable de Gauss, hubieran podido dedicarse mejor a cualquier otra cosa que no fuera la Matemática. Escribiendo en 1810 a su íntimo amigo el astrónomo y matemático Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846), Gauss dice, "Este invierno estoy dando dos cursos de conferencias a tres estudiantes, de los cuales uno está regularmente preparado, el otro menos que regularmente, y el tercero carece de preparación y capacidad. Tales son las cargas de una cátedra de Matemática".

El sueldo que Göttingen podía pagar a Gauss en aquella época, los franceses se dedicaban al saqueo de Alemania para poder proporcionar un buen gobierno a los germanos, era modesto, aunque suficiente dadas las pocas necesidades de Gauss y su familia. Los lujos jamás atrajeron al Príncipe de los matemáticos, cuya vida había sido siempre dedicada a la ciencia desde antes de cumplir los veinte años. Como decía su amigo Sartorius von Waltershausen, "Gauss fue sencillo y sin afectación desde su juventud hasta el día de su muerte. Un pequeño estudio, una mesita de trabajo con un tapete verde, un pupitre pintado de blanco, un estrecho sofá, y, después de cumplir los 70 años, un sillón, una lámpara con pantalla, una alcoba fresca, alimentos sencillos, un batón y un gorro de terciopelo eran todas sus necesidades".

Si Gauss era sencillo y económico, los franceses invasores de Alemania en 1807 eran más sencillos y económicos. Para gobernar a Alemania de acuerdo con sus ideas, los vencedores de Auerstedt y Jena multaron a los vencidos con cantidades mayores de las que podían tolerar. Como profesor y astrónomo de Göttingen, Gauss fue obligado a pagar una contribución involuntaria de 2.000 francos para sostener los gastos de las guerras napoleónicas. Esta exorbitante suma era superior a la capacidad económica de Gauss.

Gauss recibió una carta de su amigo el astrónomo Olbers enviándole el importe de la multa, y expresando su indignación por el hecho de que un estudioso se viera sometido a una extorsión tan mezquina. Pero Gauss, agradeciendo a su generoso amigo el rasgo, devolvió el dinero al amable dador. No todos los franceses eran tan económicos como Napoleón. Poco después de que Gauss devolviese a Olbers el dinero, recibió una breve y amistosa nota de Laplace comunicándole que el famoso matemático francés había pagado la multa de los 2.000 francos impuesto al matemático más grande del mundo, y que consideraba como un honor haber podido eliminar esa inmerecida carga de los hombros de su amigo. Como Laplace había pagado la multa en París, Gauss no pudo devolverle el dinero. De todos modos, se negó a aceptar la ayuda de Laplace. Un suceso inesperado y no buscado le capacitó para devolver a Laplace su dinero con intereses, en un plazo muy rápido. Aunque era sabido que Gauss se había negado a ser ayudado económicamente el siguiente ensayo no fracasó. Un admirador de Francfort le envió anónimamente 1000 florines. Como Gauss ignoraba quien era el donante, se vio forzado a aceptar el regalo.

La muerte de su amigo Ferdinando, el precario estado de Alemania bajo el gobierno de los franceses, las aflicciones económicas y la pérdida de su primera mujer alteraron la salud de Gauss, haciendo desgraciada su vida cuando apenas había cumplido treinta años. Una predisposición constitucional a la hipocondría agravada por el incesante exceso de trabajo intervino de un modo esencial. Pero jamás participó sus desventuras a sus amigos, con quien siempre estuvo en una tranquila correspondencia, y sólo confesó desdichas en uno de sus manuscritos matemáticos íntimos. Después de su nombramiento como director del Observatorio de Göttingen, en 1807, Gauss recurrió algunas veces, durante los 3 años siguientes, a su diario, para hacer geniales anotaciones. En un manuscrito sobre las funciones elípticas, las cuestiones puramente científicas son repentinamente interrumpidas por estas palabras: "La muerte me sería más querida que esta vida". El trabajo constituyó su medicina.

Los años 1811-12 (Gauss tenía 34 años en 1811) fueron mejores. Con una mujer que podía cuidar a sus hijos pequeños, Gauss comenzó a disfrutar de cierta paz. Por entonces, casi exactamente un año después de su segundo matrimonio, el gran cometa de 1811 fue observado por Gauss en el crepúsculo del día 22 de agosto. Era una tarea digna de él esgrimir las armas que había inventado para sojuzgar a los planetas menores.

Tales armas resultaron adecuadas. Mientras las gentes supersticiosas de Europa seguían el imponente espectáculo con ojos de avestruz, contemplando al cometa flamear su cimitarra al aproximarse al Sol y viendo en la ígnea hoja la advertencia de los cielos de que el rey de los reyes estaba enojado con Napoleón y harto de la cruel tiranía, Gauss tuvo la satisfacción de comprobar que el cometa seguía el camino que había calculado rigurosamente hasta el último decimal. El siguiente año, los incrédulos vieron también comprobada otra de sus predicciones con el incendio de Moscú y la destrucción del ejército de Napoleón en las llanuras heladas de Rusia.

Este es uno de los raros ejemplos donde la explicación popular está de acuerdo con los hechos, y conduce a consecuencias más importantes que las científicas. El mismo Napoleón era una persona altamente crédula que reconciliaba sus carnicerías con una fe infantil en una Providencia inescrutable, creyendo ser un Hombre del Destino. Es probable que el espectáculo celeste de un innocuo cometa, que paseaba su cola por el cielo, dejara su impresión en el subconsciente de un hombre como Napoleón, alterando su juicio. La reverencia casi supersticiosa de ese hombre para la Matemática y los matemáticos no beneficia a nadie, aunque ha sido frecuentemente citada como una de las principales justificaciones para ambos.

Aparte de la tosca apreciación del valor de la Matemática en las cuestiones militares, donde su utilidad puede ser apreciada hasta por un idiota ciego, Napoleón no tenía el menor concepto de lo que era la Matemática a que se dedicaban sus grandes contemporáneos Lagrange, Laplace y Gauss. Después de haber estudiado en el colegio la Matemática elemental, Napoleón se dirigió demasiado pronto hacia otras cosas, y sus conocimientos matemáticos nunca fueron profundos. Aunque parece increíble que un hombre de la capacidad demostrada por Napoleón pudiera subestimar tan groseramente las dificultades inherentes a cuestiones que estaban más allá de su comprensión, basta recordar el hecho de que tuvo la risible audacia de asegurar al autor de la *Mécanique céleste* que leería su libro el primer mes que tuviera libre. Newton y Gauss podían haber realizado esa proeza, pero Napoleón sólo hubiera sido capaz de hojear la obra sin fatigarse demasiado.

Constituye una satisfacción recordar que Gauss era demasiado orgulloso para prostituir la ciencia ante Napoleón el Grande, halagando la vanidad del Emperador al solicitarle, en nombre de su notorio respeto para la Matemática, le perdonara la multa de 2.000 francos, según le habían aconsejado algunos de sus amigos. Seguramente, Napoleón se hubiera sentido clemente. Pero Gauss no podía olvidar la muerte de Ferdinando, y creía que tanto él como la Matemática podrían arreglárselas sin la condescendencia de Napoleón.

Ningún contraste más notable entre el genio matemático y el genio militar que el proporcionado por sus actitudes respectivas ante el enemigo caído. Ya hemos visto cómo Napoleón trató a Ferdinando. Cuando Napoleón cayó, Gauss no exteriorizó su alegría. Tranquilamente, y con el mayor desinterés, leyó cuanto pudo encontrar acerca de la vida de Napoleón, e hizo cuanto pudo para comprender las acciones de un hombre como el Emperador francés. Este esfuerzo le sirvió de diversión. Gauss tenía un agudo sentido del humor, y el notable realismo que heredó de sus antepasados campesinos habrán incitado su sonrisa ante los hechos heroicos.

El año 1811 pudo haber sido un jalón en la Matemática comparable a 1801 -el año en que aparecieron las *Disquisitiones Arithmeticae- si* Gauss hubiera hecho público un descubrimiento que confió a Bessel. Habiendo definido los números complejos y su representación geométrica como puntos del plano de la Geometría analítica, Gauss se propuso investigar lo que actualmente se llaman *funciones analíticas* de variable compleja.

El número complejo $x + iy$, donde i designa $\sqrt{-1}$, representa el punto (x,y). Para abreviar $x + iy$ será denotado por la letra z. Cuando x, y tornan independientemente valores reales de cualquier manera, el punto z *se* mueve sobre el plano, pero no al azar, sino en una forma determinada por aquella en que x, y asumen sus valores. Cualquier expresión que contenga z, como z^2 o $1/z$, etc., que toma un valor definido *único* cuando se asigna un valor a z, se llama *función uniforme* de z. Denotaremos tal función por f(z). Por tanto, si $f(z)$ es la función particular z^2, de modo que aquí

$$f(z) = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy + (iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \text{ (porque } i^2 = 1)$$

es evidente que cuando se asigna un valor a z o sea $x + iy$, por ejemplo $x = 2$, $y = 3$, de manera que $z = 2 + 3i$, queda determinado precisamente un valor de $f(z)$; y entonces, para $z = 2 + 3i$, tendremos $z^2 = - 5 + 12i$.

No todas las funciones uniformes *f(z)* son estudiadas en la teoría de funciones de una variable compleja; las funciones *monógenas* quedan para un examen detenido. La razón de ello será expuesta después de que hayamos dicho lo que significa la palabra *monóqeno.*

Supongamos que *z* toma otra posición, es decir *z'*. La función *f(z)* toma otro valor *f(z')*, obtenido al sustituir *z* por *z'*. La *diferencia* *f(z') - f (z)* entre el nuevo y el antiguo valor de la función se divide ahora por la diferencia entre el nuevo y el antiguo valor de la variable, o sea [*f(z') - f(z)*]/(*z' - z*) y, precisamente como se ha hecho para calcular la inclinación de una gráfica al encontrar la derivada de la función que la gráfica representa, veremos que *z'* se aproxima a *z* indefinidamente, de modo que *f(z')* se aproxima a *f(z)* simultáneamente. Pero aquí aparece un nuevo y notable fenómeno.

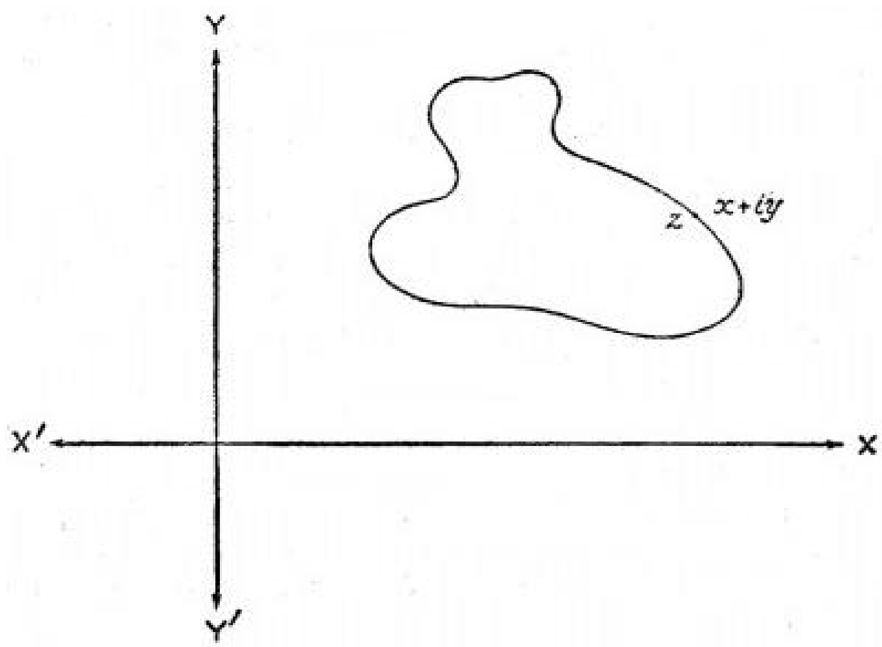

Figura 2

No existe aquí una única forma en la que *z'* pueda moverse hasta coincidir con *z*, pues *z'* puede moverse sobre todo el plano de los números complejos por uno cualquiera de los infinitos caminos, antes de coincidir con *z*. No podemos esperar que el valor límite de *[f (z') - f (z)]/(z'- z)* cuando z' coincide con *z* sea *el mismo* para *todos* esos caminos, y en general *no* lo es. Pero si *f(z)* es tal, que el valor límite justamente descrito es el mismo para *todos* los caminos por los que *z'* se mueve en coincidencia con *z*, entonces se dice que *f(z)* será monógena en z (o en el punto que represente z). La uniformidad (anteriormente descripta) y la *monogeneidad* son rasgos distintivos de las funciones ana*líticas* de una variable compleja.

Es posible formarse cierta idea de la importancia de las funciones analíticas teniendo en cuenta el hecho de que amplios campos de las teorías del movimiento de los fluidos (también de la electricidad matemática y de la representación de mapas que no deforman ángulos) son tratados naturalmente por la teoría de las funciones *analíticas* de una variable compleja. Supongamos que tal función *f(z)* se descompone en su parte "real" (aquella que no contiene la "unidad imaginaria" *i)* y en su parte "imaginaria", o sea *f(z)* = U + *i*V. Para la función analítica especial z^2 tenemos $U = x^2 - y^2$, $V = 2xy$. Imaginemos una película de un líquido que se extiende sobre un plano. Si el movimiento del líquido se realiza sin remolinos, se obtiene una línea del movimiento basada en alguna función analítica *f(z)*, trazando la curva U = *a*, en la cual *a* es un número real, e igualmente se pueden obtener las líneas equipotenciales partiendo de V = *b* (siendo *b* un número real). Haciendo variar *a* y *b*, tendremos una imagen completa del movimiento para un área tan grande como deseemos. Para una situación dada, la de un líquido que fluye alrededor de un obstáculo, la parte difícil del problema es encontrar qué función analítica hay que elegir, y toda la cuestión ha experimentado grandes retrocesos: han sido investigadas las funciones analíticas simples y se han buscado los problemas físicos a que se ajustan. Es curioso que muchos de estos problemas artificialmente preparados hayan prestado grandes servicios en la aerodinámica, y en otras aplicaciones prácticas de la teoría del movimiento de los fluidos.

La teoría de las funciones analíticas de una variable compleja ha sido uno de los campos de los grandes triunfos matemáticos del siglo XIX. Gauss en su carta a Bessel expone el interés de su vasta teoría para el teorema fundamental, pero sus hallazgos fueron olvidados hasta que Cauchy y más tarde Weierstrass hicieron el redescubrimiento. Como esto constituye un jalón en la historia del Análisis matemático haremos una breve descripción, omitiendo todos los detalles que serían necesarios para establecer una fórmula exacta.

Si imaginamos la variable compleja *z* describiendo una curva cerrada de longitud finita sin ondas o rizos, tenemos un concepto intuitivo de lo que queremos decir al hablar de "longitud" de un trozo de esta curva.

Marquemos *n* puntos $P_1, P_2 \ldots, P_n$ sobre la curva, de modo que cada uno de los segmentos $P_1,P_2, P_2P_3, P_3P_4, \ldots, P_nP_1$ no sea mayor que una longitud finita *l* fijada de antemano. Sobre cada uno de estos segmentos elegir un punto, que no sea uno de sus extremos; hallar el valor de *f(z)* para el valor de *z* que corresponde al punto, y multiplicar este valor por la longitud del segmento en que está el punto; hacer lo mismo para *todos* los segmentos, y sumar los resultados. Finalmente, tomar el valor límite de esta suma a medida que el número de segmentos aumenta indefinidamente. Esto da la *"línea integral" de f(z)* para la curva.

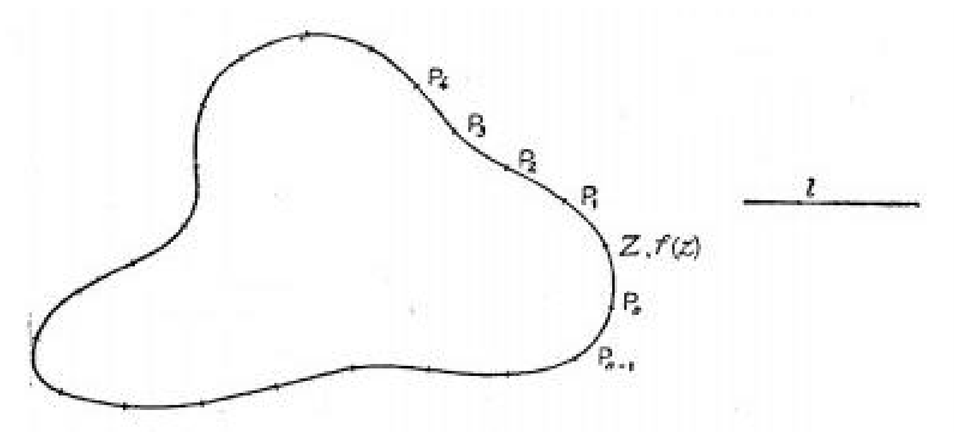

Figura 3.

¿Cuándo será cero esta línea integral? Para que la línea integral sea cero es suficiente que *f(z)* sea *analítica* (uniforme y monógena) en cualquier punto *z* sobre la curva y en el interior de la curva.

Este es el gran teorema que Gauss comunicó a Bessel en 1811, y que, con otro teorema de tipo similar, en las manos de Cauchy que lo redescubrió independientemente, iba a tener como corolarios muchos de los importantes resultados del Análisis.

La astronomía no absorbió todas las prodigiosas energías de Gauss en esta época. El año 1812, cuando el gran ejército de Napoleón libraba una desesperada acción defensiva en las llanuras heladas, fue testigo de la publicación de otra gran obra de Gauss, la de las *series hipergeométricas*

$$1+\frac{ab}{c}x+\frac{a(a+1)b(b+1)x^2}{c(c+1)1*2}+\ldots,$$

en la que los puntos significan que la serie continúa indefinidamente de acuerdo con la ley indicada. El término siguiente es

$$\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)}*\frac{x^3}{1*2*3}$$

Esta memoria constituye otro jalón. Como ya hemos dicho, Gauss fue el primero de los rigoristas modernos. En esta obra determinó las restricciones que hay que imponer a los números $a, b, c, x,$ para que las series converjan (en el sentido explicado al principio de este capitulo). Las series, por sí mismas no constituyen un ejercicio que sirva para aumento en habilidad en las manipulaciones analíticas y que luego pueda ser olvidado. Abarca como casos especiales, obtenidos asignando valores específicos a uno o más de los $a, b, c, x,$ muchas de las más importantes series en el Análisis, por ejemplo aquellas mediante las cuales los logaritmos, las funciones trigonométricas y varias de las funciones que aparecen repetidamente en la astronomía newtoniana y en la física matemática son calculadas y ordenadas en tablas. El teorema general del binomio es también un caso especial. Valiéndose de estas series en su forma general, Gauss mató varios pájaros de un tiro. De esta obra se han desarrollado muchas aplicaciones a las ecuaciones diferenciales de la física el siglo XIX.

La elección de estas investigaciones para realizar un serio esfuerzo es característica de Gauss. Jamás publicó cosas triviales. Cuando planteaba alguna cuestión, no sólo la dejaba terminada sino también repleta de nuevas ideas, de tal modo que sus sucesores podían aplicar lo que Gauss inventó a nuevos problemas. Aunque las limitaciones del espacio nos impide la exposición de los muchos ejemplos de este carácter fundamental de las contribuciones de Gauss a la Matemática pura, no podemos, aunque se trate de un breve resumen, pasar en silencio su obra sobre la ley de reciprocidad bicuadrática. Su importancia radica en que dio una nueva y totalmente imprevista dirección a la Aritmética superior.

Valiéndose de la reciprocidad *cuadrática* (segundo grado) era natural que Gauss considerara la cuestión general de las congruencias binómicas de cualquier grado. Si m es un número entero no divisible por el primo p, y si n es un número entero positivo, y si además puede encontrarse un número x tal que $x^n \equiv m$ (mód p), m se denomina un *resto n - ic* de p; cuando $n = 4$, m es un *resto bicuadrático* de p.

El caso de las congruencias binomias *cuadráticas* ($n = 2$) poco sugiere cuando n es superior a 2. Una de las cuestiones que Gauss debía haber incluido en la eliminada sección octava (o posiblemente, como dice Sophie Germain, en el proyectado pero inacabado segundo volumen) de las *Disquisitiones*

Arithmeticae era una exposición de estas congruencias superiores, y una búsqueda de las leyes correspondientes de reciprocidad, o sea las interconexiones para la resolución o no resolución del par x^n º p (mód q), $x^n \equiv q$ (mód p), donde p, q son primos. En particular, los casos $n = 3$, $n = 4$ tenían que haber sido investigados.

La memoria de 1825 abre nuevos caminos con toda la audacia propia de los grandes precursores. Después de muchos falsos comienzos, que llevaron el problema a una complejidad intolerable, Gauss descubrió el camino "natural". Los números *racionales* enteros 1, 2, 3,... no son apropiados para el establecimiento de la ley de reciprocidad *bicuadrática*, como lo son para la cuadrática. Debía ser inventado una especie totalmente nueva de números enteros. Son los llamados en*teros complejos gaussianos*, y corresponden a todos los números complejos de la forma $a + bi$, en la que a, b son *enteros racionales* e i es el símbolo de $\sqrt{-1}$.

Para enunciar la ley de reciprocidad bicuadrática, es necesario una detenida discusión preliminar de las leyes de la divisibilidad aritmética de tales *complejos enteros*. Gauss lo hizo, y con ello inauguró la teoría de los números algebraicos, que probablemente tenía muy presente cuando emitió su opinión acerca del último teorema de Fermat. Para la reciprocidad cúbica ($n = 3$,) encontró también el camino exacto de una forma similar. Su trabajo sobre esta cuestión se encuentra en sus documentos póstumos.

La significación de este gran progreso se apreciará más claramente cuando estudiamos las obras de Kummer y Dedekind. Por el momento bastará decir que el discípulo favorito de Gauss, Eisenstein, se valió de la reciprocidad cúbica. Además, descubrió una asombrosa relación entre la ley de reciprocidad bicuadrática y ciertas partes de la teoría de funciones elípticas, en las que Gauss trabajó aunque no comunicó sus hallazgos.

Los *enteros* complejos gaussianos son, como es natural, una subclase de *todos los números* complejos, y podría suponerse que la teoría *algebraica de todos* los números daría lugar, como un detalle trivial, a la teoría *aritmética* de los *enteros* abarcados. Pero no es este el caso. Comparada con la teoría aritmética, la algebraica es infantilmente fácil. Los *números racionales* (números de la forma a/b, donde a, b son números naturales) quizá proporcionan una razón de por qué esto es así. Podemos *siempre* dividir un número racional por otro, y obtener *otro* número racional: a/b dividido por c/d proporciona el número racional ad / bc.

Pero un entero natural dividido por otro entero natural, no siempre es otro *entero* natural: 7 dividido por 8 da 7/8. Por tanto, si debemos limitarnos a *los enteros*, en caso de interés para la teoría de los números, tendríamos que ligar nuestras manos y nuestros pies antes de iniciar la partida. Esta es una de las razones por las cuales la Aritmética superior sea más difícil que el Álgebra, superior o elemental.

Gauss hizo también progresos igualmente significativos en Geometría, en las aplicaciones de la Matemática a la geodesia, en la teoría newtoniana de la atracción y en el electromagnetismo. ¿Cómo es posible que un hombre cumpliera esta colosal tarea de tan alto valor? Con característica modestia Gauss declara que "si otros reflexionaran sobre las verdades matemáticas tan profunda y continuamente como yo lo he hecho, realizarían mis descubrimientos". La explicación de Gauss recuerda la de Newton, quien al ser preguntado acerca de cómo había hecho descubrimientos astronómicos superiores a los de todos sus predecesores, replicó: "Pensando siempre en ellos". Esto sería sencillo para Newton, pero no lo es para cualquier otro mortal.

Parte del enigma de Gauss encuentra su respuesta en su *involuntaria* preocupación por las ideas matemáticas, lo que a su vez exige, como es natural, una explicación. ¿Cómo un hombre joven, como era Gauss, pudo ser "secuestrado" por la Matemática? Al conversar con los amigos quedaba repentinamente silencioso e indiferente a todo, invadido por pensamientos que era incapaz de gobernar. Más tarde recobraba el control sobre sus pensamientos -o perdía su gobierno sobre ellos- y conscientemente dirigía todas sus energías a la solución de las dificultades hasta que quedaban vencidas. Planteado un problema, jamás lo abandonaba hasta haberle resuelto, aunque no era raro que varias cuestiones atrajeran su atención simultáneamente.

En uno de esos casos (Gauss lo refiere en las *Disquisitiones*, pág. 636) el gran matemático nos cuenta que durante cuatro años apenas pasó una semana en que no empleara algún tiempo intentando establecer si cierto signo debía ser más o menos. La solución apareció finalmente como un relámpago. Pero sería absurdo suponer que la hubiera podido encontrar sin haber empleado muchas horas intentando hallarla. Con frecuencia, después de haber trabajado infructuosamente durante semanas en algún problema, Gauss encontraba la solución clara después de haber pasado una noche de insomnio. La capacidad para concentrarse de un modo intenso y prolongado constituía parte de su secreto.

En esta capacidad para entregarse al mundo de sus propios pensamientos Gauss recuerda a Arquímedes y a Newton. En otros dos aspectos se halla también al par de ellos: sus dotes para la observación precisa y su capacidad para la invención científica que le permitió idear los instrumentos necesarios para sus investigaciones. La geodesia debe a Gauss la invención del heliotropo, un mecanismo ingenioso gracias al cual pueden ser transmitidas instantáneamente señales por medio de la luz reflejada. Para su época, el heliotropo constituía un gran progreso. Los instrumentos astronómicos que utilizó también fueron perfeccionados por Gauss. Para su empleo en las investigaciones fundamentales sobre el electromagnetismo, Gauss inventó el magnetómetro bifilar. Como un ejemplo final de su habilidad mecánica, puede recordarse que Gauss, en 1833, inventó el telégrafo eléctrico, y que él y su colaborador Wilhelm Weber (1804-1891), lo usaron para enviar mensajes. La combinación del genio matemático con la habilidad experimental es extraordinariamente rara en todas las ciencias. Gauss se cuidó poco de la posible utilización práctica de sus invenciones. Como Arquímedes, prefería la Matemática a todas las otras cosas; otros podrían recoger los frutos tangibles de su labor. Pero Weber, su colaborador en las investigaciones electromagnéticas, vio claramente lo que el pequeño telégrafo de Göttingen significaba para la civilización. Recordaremos que el ferrocarril comenzó a usarse en los primeros meses del año 1830. "Cuando el globo terráqueo esté cubierto con una red de ferrocarriles y de alambres telegráficos, profetizaba Weber en 1835, esta red prestará servicios comparables a los del sistema nervioso en el cuerpo humano, en parte como un medio de transporte, en parte como un medio para la propagación de las ideas y sensaciones, con la rapidez de la luz".

Ya hemos hecho notar la admiración que Gauss tuvo por Newton. Conociendo los enormes esfuerzos que le costaron algunas de sus obras maestras, Gauss estaba en condiciones de apreciar el mérito de la meditación incesante en que tuvo que sumirse Newton para realizar su enorme obra. La historia de Newton y de la manzana provocaba la indignación de Gauss. "Necios, exclamaba, creed en esa historia si os place, pero la verdad es ésta. Un hombre oficioso y estúpido preguntó a Newton cómo había descubierto la ley de la gravitación. Viendo que era difícil tratar con un sujeto de mentalidad infantil, y deseando salir del paso, Newton respondió que una manzana al caer había chocado en su nariz. El hombre quedó completamente satisfecho y perfectamente convencido".

La historia de la manzana ha encontrado un eco en nuestros propios tiempos. Al ser importunado Einstein por la pregunta de cómo había llegado a su teoría del campo gravitatorio, el interrogado respondió que en una ocasión había preguntado a un obrero, que desde un andamio había caído en un montón de paja, acerca de si se había dado cuenta del tirón de la "fuerza" de la gravedad cuando caída.

Al saber que no había percibido ninguna fuerza, Einstein vio inmediatamente que la "gravitación" en una región suficientemente pequeña del espacio-tiempo, puede ser reemplazada por una aceleración del sistema de referencia del observador (el obrero que cayó). Probablemente, esta historia es también completamente falsa. Einstein forjó su idea después de una pesada labor, que consumió varios años de su existencia, para dominar el cálculo sensorial de los matemáticos italianos, Ricci y Levi-Civita, discípulos de Riemann y Christoffel, los cuales a su vez, se habían inspirado en la obra geométrica de Gauss.

Al hablar de Arquímedes, para quien tenía una admiración sin límites, Gauss observaba que no podía comprender cómo Arquímedes no llegó a inventar el sistema decimal de numeración o su equivalente (con alguna base diferente de 10). La obra de Arquímedes, no propia de un griego, al idear un esquema de escritura y de cálculo numérico más allá de la capacidad del simbolismo griego, puso, según Gauss, en las manos de Arquímedes la notación decimal, con su principio importantísimo de posición ($325 = 3 * 10^2 + 2 * 10 + 5$). Gauss consideraba este fracaso de Arquímedes como la mayor calamidad para la historia de la ciencia. "¡A qué altura estaría la ciencia ahora si Arquímedes hubiera hecho ese descubrimiento!", exclamaba pensando en sus cálculos aritméticos y astronómicos que habrían sido imposibles sin la notación decimal. Apreciando con claridad la significación que para todas las ciencias tendría el perfeccionamiento de los métodos de cálculo, Gauss trabajó como un esclavo hasta que largas páginas de números eran reducidas a escasas líneas, que podían ser examinadas rápidamente. Gauss hizo gran parte de sus cálculos mentalmente, pero los perfeccionamientos eran necesarios para los individuos de menos capacidad mental.

A diferencia de Newton en sus últimos años, Gauss jamás se sintió atraído por los cargos públicos, aunque su agudo interés y sagacidad en todas las cuestiones correspondientes a la ciencia de la estadística, seguros y "aritmética política" habrían hecho de él un excelente Ministro de Hacienda. Hasta su última enfermedad, se sintió completamente satisfecho dedicándose a su ciencia y a sus sencillas diversiones. La lectura de los literatos europeos y de los clásicos de la antigüedad, el interés por la política mundial y el estudio de las lenguas extranjeras y de las nuevas ciencias (incluyendo la botánica y la mineralogía) constituían sus diversiones.

Le atraía especialmente la literatura inglesa, aunque los aspectos tétricos de las tragedias de Shakespeare no eran adecuados para la aguda sensibilidad del gran matemático a todas las formas de sufrimientos, y prefería otras obras menos trágicas. Las novelas de Sir Walter Scott (contemporáneo de Gauss), eran leídas ávidamente en cuanto aparecían, pero el lamentable final de *Kenilworth* apesadumbró a Gauss durante algunos días, y lamentó mucho haber leído la triste historia. Un desliz de Sir Walter hizo reír al astrónomo matemático, y empleó muchos días para corregir en todos los ejemplares que encontró la errónea frase "la luna se pone por el noroeste". Las obras históricas en inglés, particularmente la *Declinación* y *caída del Imperio Romano* de Gibbon y la *Historia de Inglaterra* de Macaulay, le proporcionaron un placer especial.

Para su joven y meteórico contemporáneo Lord Byron, Gauss sentía marcada antipatía. La postura de Byron, su hastío del mundo reiteradamente expresado, su afectada misantropía, y sus perfiles románticos habían cautivado a los sentimentales alemanes todavía más de lo que habían impresionado a los impasibles británicos, quienes, por lo menos los varones, pensaban que Byron era un asno estúpido. A Gauss le disgustaba el histerismo de Byron. Ningún hombre que hubiera gustado tantos y tan excelentes licores y, hubiera conocido tan hermosas damas como Byron, podía estar tan hastiado del mundo como pretendía estar este perverso poeta, de ojos centelleantes y manos temblorosas.

Los gustos de Gauss por la literatura de su propio país no eran los corrientes de un alemán intelectual. Jean Paul constituía su poeta germano favorito; Goethe y Schiller, cuya vida se superpone en parte a la suya, no gozaban de su más alta estima. Goethe no le satisfacía, y en cuanto a Schiller, por tener una base filosófica diferente de la suya, le disgustaba como poeta. Calificó la *Resignación* como un poema corrompido y blasfemo y en el margen de su ejemplar escribió la palabra "Mefistófeles".

La facilidad con que dominó los idiomas durante su juventud la conservó durante toda su vida. Las lenguas eran para él una verdadera diversión. Cuando ya era anciano quiso comprobar la flexibilidad de su cerebro aprendiendo un nuevo idioma. Creía que este ejercicio le ayudaría a mantener joven su mente. En efecto, teniendo 68 años comenzó a estudiar intensamente el ruso, sin ayuda de nadie. A los dos años leía las obras rusas en prosa y en verso con facilidad, y escribía en ruso sus cartas a los amigos científicos de San Petersburgo. En opinión de los rusos que le visitaron en Göttingen, también hablaba este idioma perfectamente. La literatura rusa era colocada por él al nivel de la inglesa por el placer que le proporcionaba. También intentó aprender sánscrito pero no le gustó.

Su tercera diversión, la política mundial, le absorbía una hora más o menos al día. Visitando las bibliotecas con regularidad, se mantenía al corriente de los acontecimientos, leyendo todos los diarios recibidos desde el *Times* de Londres a las revistas locales de Göttingen.

En política, el aristócrata intelectual Gauss era completamente conservador, pero no en sentido reaccionario. Su época era turbulenta, tanto en su país come en el extranjero. El gobierno del populacho y los actos de violencia política producían en él, como refiere su amigo von Waltershausen, un "indescriptible horror". La revuelta de París en 1848, le llenó de pesadumbre.

Hijo de padres pobres, familiarizado desde la infancia con la inteligencia y moralidad de "las masas", Gauss recordaba lo que había observado, y su opinión acerca de la inteligencia, moralidad, y talento político del "pueblo" tomado en masa como hacen los demagogos, era extraordinariamente despectiva. "*Mundus vult decepi"* era un dicho que encerraba una gran verdad.

Esta desconfianza en la moralidad, integridad e inteligencia innatas del "hombre natural" de Rousseau cuando constituye el populacho o cuando delibera en salones, parlamentos, congresos y senados, fue, sin duda, inspirada, en parte, por el íntimo conocimiento de Gauss, como hombre de ciencia, de lo que "el hombre natural" hizo a los científicos franceses en los primeros días de la Revolución Francesa. Puede ser cierto, como los revolucionarios declaraban, que "el pueblo no tiene necesidad de ciencia", pero esa declaración, para un hombre del temperamento de Gauss, constituía un desafío. Aceptando el desafío, Gauss, a su vez, expresó su desprecio para todos los "conductores del pueblo" que llevan a las gentes a la revolución para su propio provecho. Cuando era anciano, creía que la paz y el simple bienestar constituían lo único bueno para cualquier país. Si la guerra civil hubiera estallado en Alemania, decía, pronto habría muerto. Las conquistas en la forma napoleónica le parecían una incomprensible locura.

Estos sentimientos conservadores no eran la nostalgia de un reaccionario, que piensa en las delicias de un pasado muerto e invariable. Gauss creía en las reformas, cuando eran inteligentes, y si el cerebro no sirve para juzgar qué reformas son inteligentes y cuáles no, ¿qué órgano del cuerpo humano es el apropiado? Gauss tenía un cerebro suficientemente potente para ver dónde llevaban a Europa algunos de los grandes hombres de Estado de su propia generación. El espectáculo no le inspiraba confianza. Sus amigos más progresistas atribuían el conservatismo de Gauss al aislamiento a que le obligaba su obra. Puede que en parte sea verdad. En los últimos veintisiete años de su vida, Gauss sólo una vez durmió fuera de su observatorio, cuando asistió a una reunión científica en Berlín, para satisfacer a

Alexander von Humboldt. Pero un hombre no siempre tiene que recorrer todo el mapa terrestre para ver lo que sucede. El cerebro y la capacidad para leer los diarios (hasta cuando mienten) y los informes de los gobiernos (especialmente cuando mienten) son algunas veces mejores que las visitas a países lejanos y los chismes de las antesalas de los hoteles. Gauss permaneció en su hogar leyendo, desconfiando de la mayor parte de lo que leía, pensando y llegando así a la verdad.

Otra causa del vigor de Gauss se encuentra en su serenidad científica y en la ausencia de ambiciones personales. Toda su ambición era el progreso de la Matemática. Cuando algún rival dudaba de sus afirmaciones referentes a alguna cuestión de prioridad, Gauss no exhibía su diario para demostrar la verdad de su aserto, sino que dejaba al tiempo enjuiciar los propios méritos.

Legendre fue uno de los que más dudaron, y un suceso hizo de él el más enconado enemigo de Gauss. En la *Theoria motus*, Gauss se refería a su descubrimiento del método de los mínimos cuadrados. Legendre había publicado el método en 1806, antes que Gauss. Con gran indignación Legendre escribió a Gauss, acusándole de falta de honradez, y quejándose de que un hombre que había hecho tantos descubrimientos tuviera la falta de decoro de apropiarse el método de los mínimos cuadrados, que Legendre consideraba como propio, Laplace intervino en la querella. No dijo si creía en las seguridades de Gauss respecto a que se había anticipado a Legendre en 10 o más años, pues conservó su suavidad habitual. Gauss no quiso presentar argumento alguno. Pero en una carta a un amigo da la prueba que podía haber puesto fin a la disputa para siempre. "Comuniqué todo este asunto a Olbers en 1802 -dice Gauss- y si Legendre lo duda podía haber interrogado a Olbers, quien conserva el manuscrito".

La disputa redundó en perjuicio del desarrollo de la Matemática, pues Legendre contagió sus injustificadas sospechas a Jacobi, e impidió que este joven, que más tarde iba a desarrollar las funciones elípticas, se pusiera en relación cordial con Gauss. Esta falta de comprensión es muy lamentable, pues Legendre era un hombre de un carácter superior y muy escrupuloso. Fue su destino verse superado por matemáticos de más imaginación que él en los campos donde la mayor parte de su larga y laboriosa vida fue gastada, y hombres más jóvenes, Gauss, Abel y Jacobi, demostraron que muchos de sus detalles eran superfluos. En todos los momentos Gauss marchó a la cabeza de Legendre. Sin embargo, cuando Legendre le acusó de haber procedido mal, Gauss acusó el golpe. Escribiendo a Schumacher (30 de julio de 1806), se queja de que "parece que es mi destino coincidir en casi todos mis trabajos teóricos con Legendre. Así ha ocurrido en Aritmética superior, en las investigaciones sobre las funciones transcendentes relacionadas con la rectificación [el proceso de encontrar la longitud del arco de una curva] de la elipse, en los fundamentos de la geometría, y ahora otra vez aquí [el método de los cuadrados mínimos]... también usado en la obra de Legendre......

Con la publicación detallada de los trabajos póstumos de Gauss y de gran parte de su correspondencia de los últimos años, todas estas antiguas disputas han sido falladas en favor de Gauss. Queda otro punto que ha merecido críticas: su falta de cordialidad para recibir las grandes obras de los demás, particularmente de los jóvenes. Cuando Cauchy comenzó a publicar sus brillantes descubrimientos de la teoría de funciones de una variable compleja, Gauss lo ignoró. El príncipe de los matemáticos no pronunció una palabra de elogio o de aliento para el joven francés. ¿Por qué ocurrió esto? Gauss mismo (como hemos visto) llegó a la médula de la cuestión años antes de que Cauchy comenzará sus trabajos. Una memoria sobre la teoría había sido una de las obras maestras de Gauss. Además, cuando el trabajo de Hamilton sobre los cuaternios (que será considerado en un capítulo posterior) tuvo que llamar su atención en 1852, tres años antes de su muerte, Gauss nada dijo. ¿Por qué procedió así?

El nudo de la cuestión yacía enterrado entre sus notas de más de treinta años antes. Gauss mantenía su calma y no hacía reclamaciones respecto a la prioridad. Como con el caso de sus anticipaciones en la teoría de funciones de una variable compleja, de las funciones elípticas y de la geometría no euclidiana, Gauss se sentía contento de haber realizado la obra y con ello le bastaba.

El nudo del problema de los cuaternios se halla en el Álgebra, que es para las rotaciones en el espacio de tres dimensiones lo que el Álgebra de los números complejos es para las rotaciones en un plano. Pero en los cuaternios (Gauss los llamó mutaciones), una de las reglas fundamentales del Álgebra se derrumba. Ya no es verdad que

$$a * b = b * a,$$

y es imposible establecer un Álgebra de rotaciones en tres dimensiones en que esta regla se conserve. Hamilton, uno de los grandes genios matemáticos del siglo XIX, refiere con exuberancia irlandesa cómo luchó durante quince años con la invención de un Álgebra consecuente para hacer lo que se exigía, hasta que una feliz inspiración le dio la clave de que $a * b$ no era igual a $b * a$ en el Álgebra que buscaba. Gauss nada dice acerca del tiempo que consumió para alcanzar la meta; simplemente refiere sus resultados en algunas escasas páginas de Álgebra.

Si Gauss era algo frío en sus expresiones impresas era suficientemente cordial en su correspondencia y en sus relaciones científicas con quienes le buscaban con un espíritu de desinteresada curiosidad. Una de sus amistades científicas no sólo tiene interés matemático, también muestra la liberalidad de las opiniones de Gauss referente a las mujeres dedicadas a la ciencia. La amplitud de su mente a este respecto es muy notable para cualquier hombre de su generación, pero para un alemán carecía casi de precedentes.

La dama en cuestión era Mademoiselle Sophie Germain (1776-1831), que tenía un año más que Gauss. Ella y Gauss jamás se encontraron, y Sophie murió (en París) antes de que la Universidad de Göttingen la concediera el grado de Doctor Honorario que Gauss solicitaba de la Facultad, para ella. Por una curiosa coincidencia veremos que la mujer matemática más célebre del siglo XIX, otra Sophie, obtuvo su grado en la misma liberal Universidad muchos años después de que Berlín la rechazara, teniendo en cuenta su sexo. Sofía parece ser un nombre feliz en la Matemática para las mujeres, siempre que se afilien a maestros de amplia mente. La mujer matemática que ha rayado a mayor altura en nuestros tiempos Emmy Noether (1882-1935) procedía también de Göttingen[4].

El interés científico de Sophie Germain abarcó la acústica, la teoría matemática de la elasticidad y la aritmética superior, en cuyos campos realizó notables trabajos. Una contribución al estudio del último teorema de Fermat dio lugar, en 1908, a un considerable progreso en esta dirección por parte del matemático americano Leonard Eugene Dickson (1874).

Después de haber leído las *Disquisitiones Arithmeticae*, Sophie escribió a Gauss comunicándole algunas de sus observaciones aritméticas. Temiendo que Gauss pudiera abrigar prejuicios contra una mujer matemática le escribió con nombre de hombre. Gauss formó una alta opinión del autor de las cartas, redactadas en excelente francés, y firmadas por "Mr. Leblanc".

---

[4] Cuando los sagaces nazis expulsaron a Fraulein Noether de Alemania por ser judía, el colegio Bryn Mawr, de Pennsylvania, la recibió. Era la algebrista de mayor capacidad creadora abstracta del mundo. En menos de una semana de la nueva Alemania, Göttingen perdió la liberalidad tan querida a Gauss, por cuyo mantenimiento luchó toda su vida.

Leblanc abandonó su disfraz cuando Sophie Germain se vio forzada a revelar su verdadero nombre a Gauss con motivo del sitio de Hanover por las tropas francesas. En una carta fechada el 30 de abril de 1807, Gauss da las gracias a Sophie por su intervención, acerca del general francés Penerty, y deplora la guerra. A continuación, Gauss, hace grandes elogios de su amiga, y añade algunos comentarios acerca de su gran amor por la teoría de números. Como esto último tiene particular interés, citaremos un párrafo de dicha carta, que muestra a Gauss en uno de sus aspectos humanos más cordiales.

"No sé describiros mi admiración y asombro al ver a mi estimado Mr. Leblanc metamorfoseándose en este ilustre personaje [Sophie Germain], que constituye un brillante ejemplo de lo que me parecía difícil creer. El gusto por las ciencias abstractas en general, y especialmente por todos los misterios de los números, es excesivamente raro; no hay que asombrarse de ello; los encantos de esta ciencia sublime tan sólo se revelan a aquellos que tienen el valor de penetrar profundamente en el problema. Pero cuando una mujer, que de acuerdo con las costumbres y prejuicios debe encontrar muchas más dificultades que los hombres para familiarizarse con estas espinosas investigaciones, consigue vencer estos obstáculos y penetrar en los rincones más oscuros de ellos, no hay duda de que una mujer debe tener el más noble valor, los más extraordinarios talentos y un genio superior. En efecto, nada puede probarme de una forma tan halagadora e inequívoca que las atracciones de esta ciencia, que me ha proporcionado en mi vida tantos goces, no son quiméricos, como la predilección con que la habéis honrado". Luego se entrega a discusiones matemáticas. Un rasgo delicado es la fecha con que termina la carta: "Bronsvic ce 30 Avril 1807 jour de ma naissance." (Brunswick este 30 de abril 1807, día de mi cumpleaños).

Una carta escrita el 21 de julio de 1807 a su amigo Olbers demuestra que su admiración por esa mujer no era simplemente una cortesía. " ... Lagrange se halla altamente interesado por la astronomía y la aritmética superior; los dos teoremas por qué el número primo 2 es un resto cúbico o bicuadrático, que yo también le comuniqué hace algún tiempo, son considerados por él entre las cosas más bellas y más difíciles de probar. Pero Sophie Germain me ha enviado sus demostraciones; yo todavía no he podido comprobarlas, pero me parecen correctas. Al menos ha planteado la cuestión en la forma adecuada, aunque algo más difusamente de lo necesario..." Los teoremas a que Gauss se refiere, son los que afirman que las congruencias $x^3 \equiv 2 \pmod{p}$, $x^4 \equiv 2 \pmod{p}$, tienen solución.

Sería necesario un libro muy voluminoso (quizá más voluminoso que el que requeriría la obra de Newton) para describir todas las notables contribuciones de Gauss a la Matemática pura y aplicada. Aquí tan sólo podemos referirnos a algunos de los más importantes trabajos que todavía no han sido mencionados, y elegiremos aquellos que han añadido nuevas técnicas a la Matemática o que han resuelto notables problemas. Para ordenar convenientemente las fechas resumiremos los principales campos de las preocupaciones de Gauss después de 1800 del siguiente modo: 1800-1820, astronomía; 1820-1830, geodesia, las teorías de superficies y el trazado de mapas; 1830-1840 física matemática, particularmente electromagnetismo, magnetismo terrestre y la teoría de la atracción, de acuerdo a la ley de Newton; 1840-1855 Análisis situs y la Geometría asociada con funciones de una variable compleja.

Durante el período 1821-1848 Gauss fue consejero científico de los gobiernos de Hanover (Göttingen estaba bajo el gobierno de Hanover) y danés para un extenso estudio geodésico. Gauss se entregó a la labor. Su método de los mínimos cuadrados y su habilidad para idear el modo de tratar masas de datos numéricos han sido de gran interés, pero todavía tiene más importancia el hecho de que los problemas planteados por el estudio preciso de una porción de la superficie terrestre sugieren, sin duda, problemas más profundos y más generales relacionados con todas las superficies curvas. Estas investigaciones son las que han engendrado la Matemática de la relatividad. El tema no era nuevo: algunos de los predecesores de Gauss, especialmente Euler, Lagrange y Monge, investigaron la Geometría de ciertos tipos de superficies curvas, pero quedaba reservado a Gauss abordar el problema en toda su generalidad, y partiendo de sus investigaciones se desarrolló el primer gran período de la *Geometría diferencial.*

La Geometría diferencial se puede definir en términos generales como el estudio de propiedades de las curvas, superficies, etc., en el entorno de un punto, de modo que pueden ser despreciadas en las distancias las potencias de grado superior al segundo. Inspirado por este trabajo, Rieman, en 1854, escribió su clásica exposición sobre las hipótesis que constituyen los fundamentos de la Geometría, la cual, a su vez, inició el segundo gran período de la Geometría diferencial, que en la actualidad tiene empleo en la física matemática, particularmente en la teoría de la relatividad general.

Tres de los problemas que Gauss consideró en su trabajo sobre las superficies sugieren teorías generales de importancia matemática y científica, la medición de la *curvatura*, la teoría de la *representación conforme* (o trazado de mapas), y la *aplicabilidad* de las superficies.

El innecesario concepto místico de un espacio-tiempo "curvado", que es una complicación puramente matemática de la conocida curvatura visualizable en un "espacio" definido por cuatro coordenadas, en lugar de dos, era un desarrollo natural de la obra de Gauss sobre las superficies curvas. Una de sus definiciones ilustrará la racionalidad de sus conceptos. El problema es idear algún medio preciso para describir cómo la “curvatura" de una superficie varía desde un punto a otro de la superficie; la descripción debe satisfacer nuestro sentimiento intuitivo de lo que significa "más curvado" y “menos curvado".

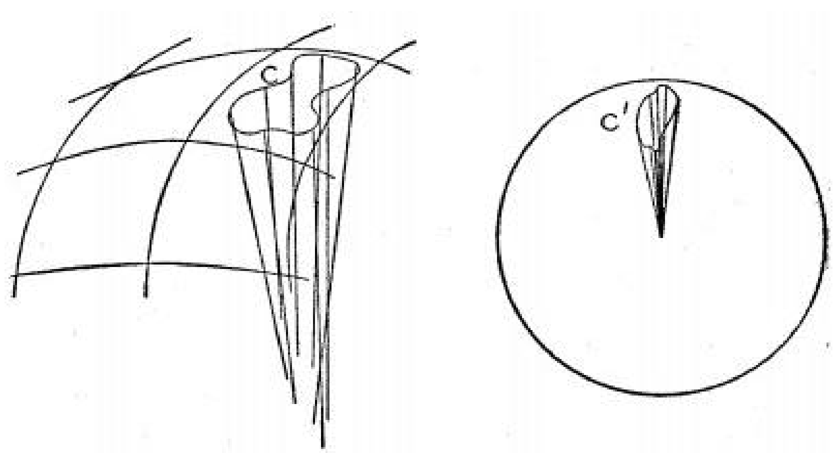

Figura 4.

La curvatura total de cualquier parte de una superficie limitada, por una curva cerrada *C* se define del siguiente modo. La *normal* a una superficie en un punto dado es la recta que pasa por el punto y que es perpendicular al plano tangente a la superficie en el punto dado. En cada punto de *C* existe una normal a la superficie. Imaginemos que se trazan todas estas normales. Ahora, desde el centro de una esfera (que puede estar en cualquier parte con referencia a la superficie considerada), cuyo radio es igual a la unidad de longitud, imaginemos que se trazan todos los radios que son paralelos a las normales a *C*. Los extremos de estos radios determinan una curva *C*', sobre la esfera de radio unidad. El *área* de esta parte de la superficie esférica cerrada por *C*' se define como la *curvatura total* de la parte de la superficie dada que es limitada por *C*. Un ligero examen mostrará que esta definición está de acuerdo con los conceptos vulgares.

Otra idea fundamental explotada por Gauss en su estudio de las superficies fue la de la *representación paramétrica*.

Requiere dos coordenadas para determinar un punto particular sobre un plano. Lo mismo ocurre cuando se trata de la superficie de una esfera o de un esferoide como la Tierra: las coordenadas, en este caso, pueden ser consideradas como latitud y longitud. Esto ilustra lo que quiere decirse con las palabras *variedad bidimensional*. En general, son necesarios y suficientes *precisamente n* números para determinar (individualizar) cada término particular de una clase de cosas (puntos, sonidos, colores, líneas, etc.), siendo la clase una *multiplicidad n-dimensional*. En tales determinaciones se acepta que sólo se asignan números a ciertas características de los términos de la clase. Por tanto, si consideramos únicamente el tono de los sonidos, tendremos una variedad unidimensional, pues un número, la frecuencia de la vibración correspondiente del sonido, basta para determinar el tono; si añadimos la sonoridad, medida en una escala conveniente, los sonidos son ahora una *variedad bidimensional*, y así sucesivamente. Si ahora consideramos una superficie como constituida por puntos, veremos que es una *variedad bidimensional* (de puntos). Usando el lenguaje de la Geometría, encontramos conveniente considerar cualquier variedad bidimensional como una "superficie", y aplicar a la variedad el razonamiento geométrico con la esperanza de hallar algo interesante.

Las consideraciones precedentes conducen a la representación paramétrica de las superficies. En la geometría de Descartes, *una* ecuación entre *tres* coordenadas representa una superficie. Supongamos que las coordenadas (cartesianas) son x, y, z. En lugar de usar una sola ecuación que ligue x, y, z, para representar la superficie, buscaremos *tres*

$$x = f(u,v),$$
$$y = g(u,v),$$
$$z = h(u,v),$$

donde $f(u,v)$, $g(u,v)$, $h(u,v)$ son las funciones (expresiones) de las nuevas variables u,v, de modo que cuando se eliminan estas variables ("se pasa el umbral") resulta entre x, y, z la ecuación de la superficie. La eliminación es posible, pues *dos* de las ecuaciones pueden ser utilizadas para despejar las *dos* incógnitas u,v; los resultados pueden entonces ser sustituidos en la tercera. Por ejemplo, si

$$x = u + v;\ y = u - v;\ z = uv,$$

tendremos $u = 1/2(x + y)$, $v = 1/2(x - y)$ de las dos primeras, y de aquí $4z = x^2 - y^2$ de la tercera. Ahora, como las variables u,v se hallan independientemente en cualquier serie dada de números, las funciones f,g,h serán tomadas en los valores numéricos, y x,y,z, se trasladarán sobre la superficie, cuyas ecuaciones son las tres antes mencionadas. Las variables u,v son llamadas los *parámetros* de las superficies, y las tres ecuaciones $x = f(u,v)$, $y = g(u,v)$ $z = h(u,v)$ sus ecuaciones paramétricas. Este modo de representar las superficies tiene grandes ventajas sobre el cartesiano cuando se aplica al estudio de la curvatura y otras propiedades de las superficies, que varían rápidamente de un punto a otro.

Obsérvese que la representación paramétrica, es *intrínseca*; se refiere a la superficie misma por sus coordenadas, y no a una extrínseca, o extraña, serie de ejes, no relacionada con la superficie, como es el caso en el método de Descartes. Obsérvese también que los dos parámetros u,v muestran inmediatamente la bidimensionalidad de la superficie. La latitud y la longitud de la Tierra son ejemplos de estas coordenadas “naturales" intrínsecas; sería más difícil tener que realizar toda nuestra navegación con referencia a tres ejes recíprocamente perpendiculares trazados por el centro de la Tierra, como se requeriría para la navegación cartesiana.

Otra ventaja del método es su fácil generalización a un espacio de cualquier número de dimensiones. Basta aumentar el número de parámetros, y proceder como antes. Cuando nos ocupemos de Riemann veremos cómo estas sencillas ideas condujeron, naturalmente, a una generalización de la Geometría métrica de Pitágoras y Euclides. Los fundamentos de esta generalización fueron establecidos por Gauss, pero su importancia para la Matemática y la ciencia física no fue apreciada hasta nuestra época.

Las investigaciones geodésicas sugirieron también a Gauss el desarrollo de otro importante método en Geometría, la representación conforme de mapas. Antes de trazar un mapa, por ejemplo de Groenlandia, es necesario determinar qué es lo que ha de ser conservado. ¿Deben deformarse las distancias, como se hace en la proyección de Mercator, hasta que Groenlandia adquiera una exagerada importancia en comparación con Norte América? ¿O deben conservarse las distancias, de manera que una pulgada sobre el mapa, medida en cualquier parte en las líneas de referencia (o sea las de latitud y longitud), corresponda siempre a la misma distancia medida sobre la superficie de la Tierra? En este caso se exige un tipo de trazado de mapas, y este tipo no conservará ningún otro rasgo que deseemos conservar; por ejemplo, si dos caminos sobre la Tierra se cortan en un ángulo determinado, las líneas que representan estos caminos sobre el mapa se cortarán en un ángulo diferente. El trazado de mapas que *conserva los ángulos* se llama representación conforme. En tal trazado la teoría de funciones analíticas de una variable compleja, antes explicada, es la más útil.

Toda la cuestión del trazado conforme de mapas es de uso constante en la física matemática y en sus aplicaciones, por ejemplo en electrostática, la hidrodinámica, y su derivada la aerodinámica, en la última de las cuales desempeña un papel la teoría de la base de sustentación.

Otro campo de la Geometría que Gauss cultivó con su conocida exactitud y genio, fue el de la aplicabilidad de superficies, cuando se requiere determinar qué superficies pueden ser adaptadas a una determinada superficie sin que se estiren o rompan. También en este caso los métodos que Gauss inventó eran de tipo general y de amplia utilidad.

En otros campos de la ciencia Gauss realizó investigaciones fundamentales, por ejemplo en las teorías matemáticas del electromagnetismo, incluyendo el magnetismo terrestre, la capilaridad, la atracción de los elipsoides (los planetas son tipos especiales de elipsoides) donde la ley de atracción es la newtoniana, y la dióptrica, especialmente en lo que se refiere a los sistemas de lentes. Esto último le dio una oportunidad para aplicar a algunas de las técnicas puramente abstractas (fracciones continuas) que desarrolló siendo joven para satisfacer su curiosidad por la teoría de números.

Gauss no sólo investigó sublimemente el aspecto matemático de todas estas cosas. Usó sus manos y sus ojos, y fue un observador extraordinariamente exacto. Muchos de los teoremas específicos que descubrió, particularmente en sus investigaciones sobre electromagnetismo y la teoría de la atracción, han venido a constituir parte de los elementos indispensables para todos los que se dedican seriamente a la ciencia física. Durante muchos años, Gauss, ayudado por su amigo Weber, buscó una teoría satisfactoria para todos los fenómenos electromagnéticos. No pudiendo hallarla, abandonó su intento.

Si hubiera encontrado las ecuaciones de Clerk Maxwell (1831-1879) del campo electromagnético habría quedado satisfecho.

Para concluir esta larga pero incompleta enumeración de los muchos hallazgos que valieron a Gauss el indiscutido título de Príncipe de los matemáticos, podemos recordar un tema sobre el cual tan sólo hizo una mención de pasada en su disertación de 1799, pero que, según sus predicciones, constituiría una de las cosas principales de la Matemática, el A*nálisis situs*. *Es* imposible establecer en este lugar una definición técnica de lo que esto significa (se requiere el concepto de un *grupo continuo*), pero un simple ejemplo puede indicarnos algo acerca del tipo de problema de que se trata. Hagamos cualquier tipo de nudo en una cuerda, y unamos los extremos de esta cuerda. Un nudo "simple" se distingue con facilidad por la vista de un nudo "complicado", pero ¿cómo daríamos una explicación matemática exacta de la diferencia entre los dos? ¿Y cómo clasificaríamos matemáticamente los nudos? Aunque Gauss no publicara nada acerca de esto, inició su estudio, según pudo verse en sus trabajos póstumos. Otro tipo de problema referente a esta cuestión es determinar el número mínimo de cortes en una superficie determinada que nos permita desarrollar la superficie sobre un plano. Para una superficie cónica basta un corte, para una esfera no basta un número finito de cortes, si no se permite una deformación.

Estos ejemplos hacen pensar que el tema es trivial. Mas si fuera así, Gauss no le hubiera concedido la extraordinaria importancia que le otorgó. Su predicción acerca de su carácter fundamental se ha cumplido en nuestra generación. En la actualidad, una vigorosa escuela (incluyendo muchos americanos; J. W. Alexander, S. Lefschetz, 0. Veblen, entre otros) ha observado que el Análisis situs o la "Geometría de posición", como algunas veces se llama, tiene ramificaciones de mucha importancia para la Geometría y para el Análisis. Es de lamentar que Gauss no hubiera robado un año o dos al tiempo dedicado a Ceres para organizar los pensamientos sobre esta vasta teoría, que habiendo sido el sueño de su época, constituye una realidad en la nuestra.

Sus últimos años están colmados de honores, pero no fue tan feliz como tenía el derecho a ser. Un hombre de una mente tan poderosa y de una inventiva tan prolífica no se resignaba con el reposo cuando aparecieron los primeros síntomas de su última enfermedad, algunos meses antes de su muerte. En una ocasión pudo escapar felizmente de una muerte violenta, y esto le hizo aún más reservado de lo que antes había sido. Por primera vez en más de veinte años abandonó Göttingen el 16 de junio de 1854, para ver el ferrocarril que se estaba construyendo entre su ciudad y Cassel. Gauss siempre había tenido gran interés por la construcción de los ferrocarriles, y ahora podía satisfacer su curiosidad. Los caballos de su coche se desbocaron, y al ser despedido del carruaje sufrió una fuerte conmoción. Se restableció, y tuvo el placer de ser testigo de las ceremonias de la inauguración, cuando el ferrocarril llegó a Göttingen el 31 de julio de 1854. Este fue su último día de tranquilidad.

Al iniciarse el nuevo año comenzó a sufrir de dilatación cardíaca y disnea, apareciendo síntomas de hidropesía. A pesar de ello continuó trabajando cuanto pudo, aunque sus manos se acalambraban y su bella y clara escritura se deformaba. Su última carta fue dirigida a Sir David Brewster, comentando el descubrimiento del telégrafo eléctrico.

Completamente consciente de su fin murió pacíficamente, después de una grave lucha para vivir, en la madrugada del 23 de febrero de 1855, teniendo 78 años. Su nombre perdurará en la Matemática.