Capítulo Decimosexto
MATEMÁTICAS Y MOLINOS DE VIENTO

CAUCHY

A Dios rogando y con el mazo dando.

Proverbio español

En las primeras tres décadas del siglo XIX la Matemática se transformó repentinamente, siendo muy diferente de lo que había sido en la época heroica post-newtoniana del siglo XVIII. El cambio tuvo lugar en el sentido de exigirse mayor rigor en la demostración, seguido de una generalización sin precedentes y de una libertad de la inventiva. Algo semejante se ha producido visiblemente en nuestros días, y hay que ser un profeta para aventurarse a predecir lo que será la Matemática dentro de tres cuartos de siglo.

Al comienzo del siglo XIX sólo Gauss tuvo el barrunto de lo que pronto iba a suceder, pero su reserva newtoniana le impidió complicar a Lagrange, Laplace y Legendre lo que él preveía. Aunque los grandes matemáticos franceses vivieron en el primer tercio del siglo XIX, gran parte de su obra parece ahora haber sido preparatoria. Lagrange, en la teoría de ecuaciones, preparó el camino a Abel y Galois, Laplace, con sus trabajos sobre las ecuaciones diferenciales de la astronomía newtoniana, incluyendo la teoría de la gravitación, adivinó el desarrollo fenomenal de la física matemática en el siglo XIX, mientras las investigaciones de Legendre en el Cálculo integral abrieron a Abel *y* Jacobi, uno de los más fecundos campos de la investigación en Análisis. La mecánica analítica de Lagrange es aun moderna, pero también iba a experimentar magníficas ampliaciones con la obra de Hamilton y Jacobi y más tarde con los trabajos de Poincaré. La obra de Lagrange en el cálculo de variaciones seguirá siendo también clásica y útil, pero los trabajos de Weierstrass le dieron una nueva dirección bajo el espíritu riguroso e inventiva de la última mitad del siglo XIX, y esa dirección se ha ampliado y renovado en nuestra época. (Los matemáticos americanos e italianos han tenido una parte esencial en este desarrollo).

Augustin-Louis Cauchy, el primero de los grandes matemáticos franceses cuyo pensamiento pertenece claramente a la edad moderna, nació en París el 21 de agosto de 1789: poco menos de seis semanas después de la caída de la Bastilla. Hijo de la Revolución, pagó su precio a la libertad y a la igualdad, creciendo en malas condiciones con un cuerpo desnutrido. Gracias a la diplomacia y buen sentido de su padre Cauchy pudo sobrevivir en medio del hambre. Habiendo escapado al Terror, pasó desde la Politécnica al servicio de Napoleón. Después del derrumbe del orden napoleónico, Cauchy sufrió todas las privaciones de las revoluciones y contrarrevoluciones, y su obra fue afectada en cierto modo por la intranquilidad social de su tiempo. Si las revoluciones y otros acontecimientos semejantes son capaces de influir sobre la obra científica de un hombre, Cauchy sería un caso que demostrara el hecho. Tuvo una extraordinaria fecundidad para la invención matemática, fecundidad que sólo ha sido superada en dos casos: Euler y Cayley. Su obra, como sus tiempos, fue revolucionaria.

La Matemática moderna debe a Cauchy dos de sus principales contribuciones, cada una de las cuales marca una separación de la Matemática del siglo XVIII. La primera fue la introducción del rigor en el Análisis matemático. Es difícil encontrar símil adecuado para expresar la magnitud de este progreso, aunque quizá podrá servir el siguiente ejemplo. Supongamos que durante siglos todo un pueblo rindiera culto a falsos dioses, y que repentinamente descubriera su error. Antes de la introducción del rigor, el Análisis matemático era un panteón de falsos dioses. En esta transformación Cauchy fue uno de los grandes precursores, junto con Gauss Y Abel. Gauss podía haber marcado el camino mucho antes de que Cauchy interviniera, pero no lo hizo, y fue el hábito de la inmediata publicación propio de Cauchy, y sus dotes para la enseñanza efectiva, los que realmente establecieron el rigor en el Análisis matemático.

La segunda contribución de importancia fundamental se refiere a la faceta opuesta, a la combinatoria. Seducido por el método de Lagrange de la teoría de las ecuaciones, Cauchy comenzó la creación sistemática de la teoría de grupos. La naturaleza de esta teoría será explicada más tarde, y por el momento tan sólo haremos notar el carácter moderno del sistema de Cauchy. Sin preguntarse si lo que él inventaba tenía o no aplicaciones para las otras ramas de la Matemática, Cauchy desarrolló sus conceptos como sistema abstracto. Sus predecesores, con excepción del universal Euler, que lo mismo escribía una memoria sobre el enigma de los números que sobre la hidráulica o el "sistema del mundo", hallaron su inspiración partiendo de las aplicaciones de la Matemática. Esta afirmación tiene, como es natural, numerosas excepciones, especialmente en Aritmética; pero antes de Cauchy pocos, si hubo algunos, buscaron descubrimientos provechosos en las simples operaciones del Álgebra. Cauchy penetró más profundamente, vio las *operaciones* y sus *leyes* combinatorias que palpitaban bajo las simetrías de las fórmulas algebraicas, las aisló, y llegó así a la teoría de grupos. En la actualidad, esta teoría elemental, aunque intrincada, es de fundamental importancia en muchos campos de la Matemática pura y aplicada, desde la teoría de ecuaciones algebraicas, hasta la Geometría y la teoría de la estructura atómica. Constituye la ciencia de la Geometría de los cristales, para sólo mencionar una de sus aplicaciones. Sus ulteriores desarrollos (en la parte analítica) se extienden hasta alcanzar la mecánica superior y la moderna teoría de ecuaciones diferenciales.

La vida y carácter de Cauchy nos recuerdan los de Don Quijote: no sabemos si reír o llorar, y nos contentamos con renegar. Su padre, Louis-François, era un ejemplo de virtud y religiosidad, cosas ambas excelentes, pero en las que es fácil excederse. Los cielos saben cómo Cauchy padre pudo escapar de la guillotina, pues era un jurista parlamentario, un caballero culto, un estudioso de los clásicos, un católico fanático y, por si fuera poco, oficial de policía en París cuando cayó la Bastilla. Dos años antes de que estallara la Revolución contrajo matrimonio con Marie-Madeleine Desestre, una excelente mujer, no muy inteligente, que, como él, también era una católica fanática.

Agustín era el mayor de seis hijos (dos hijos y cuatro hijas). Agustín heredó y adquirió de sus padres todas las estimables cualidades que hacen de la lectura de su vida, una de esas historias amorosas, encantadoras, insípidas como huevos sin sal, propias para muchachas de 16 años, en las que el héroe y la heroína son puros como ángeles santos de Dios. Con tales padres, era natural que Cauchy llegara a ser el obstinado Quijote del catolicismo francés, cuando la Iglesia se hallaba a la defensiva entre los años 1830 y 1840. Sufrió por su religión, y por ello merece respeto, posiblemente hasta en el caso de que fuera el relamido hipócrita que suponen sus colegas. Sus persistentes prédicas acerca de la belleza de la santidad hizo que muchas gentes le volvieran la espalda, y engendró una posición a sus piadosos sistemas que no siempre merecían. Abel, aunque hijo de un ministro del Señor y buen cristiano, expresa el disgusto que le inspiraban algunas de las prácticas de Cauchy, cuando escribe: "Cauchy es un católico fanático, cosa extraña en un hombre de ciencia". La palabra que subraya es "fanático", y no el sustantivo que califica. Dos de los más grandes matemáticos de que luego trataremos, Weierstrass y Hermite, eran católicos. Pero eran religiosos, no fanáticos.

La infancia de Cauchy coincidió con el período más cruento de la Revolución. Las escuelas estaban cerradas. No necesitándose por el momento ciencia ni cultura, la Comuna había dejado morir de hambre a los hombres cultos y a los científicos, o los había enviado a la guillotina. Para escapar del peligro, Cauchy padre se trasladó con su familia al lugar de su nacimiento, a la aldea de Arcueil. Allí escapó al Terror, semihambriento, alimentando a su mujer y a su hijo con los escasos frutos y vegetales que podía lograr. En consecuencia, Agustín creció delicado, con escaso desarrollo físico. Pasaron casi veinte años, antes de que pudiera restablecerse de la mala nutrición de su infancia, y durante toda su vida su salud fue precaria.

Este retiro, cada vez menos estricto, duró casi once años, durante los cuales Cauchy padre emprendió la educación de sus hijos. Escribía sus propios textos, algunos de ellos en verso fluido, que dominaba a la perfección. El verso, creía Cauchy, hacen la gramática, la historia y sobre todo la moral, menos repulsivas para la mente juvenil. El joven Cauchy adquirió de este modo su extraordinaria fluidez para el verso francés y latino que le distinguió toda su vida. Sus versos abundan en nobles sentimientos, ampulosamente expresados, y reflejan admirablemente el carácter piadoso de su vida intachable. Gran parte de las lecciones fueron dedicadas a una estrecha instrucción religiosa, a la que la madre asistía.

Cerca de Arcueil se hallaban las propiedades del marqués de Laplace y del conde Claude Louis Berthollet (1748-1822), el distinguido y excéntrico químico que salvó su cabeza en la época del Terror por conocer a la perfección todos los secretos de la pólvora. Los dos eran grandes amigos. Sus jardines estaban separados por un muro común, de cuya puerta ambos poseían la llave. A pesar de que tanto el matemático como el químico no eran muy religiosos, Cauchy padre gozaba de la amistad de sus distinguidos y opulentos vecinos.

Berthollet jamás salía de su casa. Laplace, más sociable, comenzó a visitar la casucha de su amigo, donde quedó sorprendido por el espectáculo del pequeño Cauchy, demasiado débil físicamente para gozar de la libertad de un niño bien nutrido, inclinado sobre sus libros y papeles como un monje penitente. No tardó mucho Laplace en descubrir que el muchacho tenía enorme talento matemático, y le aconsejó cuidar de su salud. Pocos años después, Laplace pudo escuchar, con cierto resquemor, las conferencias de Cauchy sobre las series infinitas, temiendo que los descubrimientos del audaz joven acerca de la convergencia pudieran destruir todo el vasto edificio de su mecánica celeste. "El sistema del mundo" estuvo a punto de derrumbarse en aquella época; si la órbita de la Tierra, casi circular, hubiera sido un poco más elíptica, las series infinitas sobre las cuales Laplace basó sus cálculos, habrían sido divergentes. Felizmente, su intuición astronómica le salvó del desastre, y experimentó una sensación de infinito alivio después de una cuidadosa comprobación de la convergencia de todas sus series por los métodos de Cauchy.

El día 1° de enero de 1800, Cauchy padre, que se había mantenido discretamente en contacto con París, fue elegido secretario del Senado. Sus oficinas se hallaban en el Palacio de Luxemburgo. El joven Cauchy se aprovechaba de estas oficinas, utilizando un rincón para dedicarse al estudio. Así tuvo ocasión de ver con frecuencia a Lagrange, entonces profesor en la Politécnica, que muchas veces venía a discutir diversos asuntos con el secretario Cauchy. Lagrange se interesó pronto por el muchacho, y, lo mismo que Laplace, quedó sorprendido por su talento matemático. En una ocasión, cuando Laplace y otras notabilidades estaban presentes, Lagrange señaló al joven Cauchy, que se encontraba en su rincón, y dijo: "¿Veis ese jovencito?, pues bien, nos suplantará por lo que a la Matemática se refiere".

Lagrange dio algunos consejos a Cauchy padre, temiendo que el delicado muchacho pudiera quemarse en su propio fuego: "No le dejéis abrir un libro de Matemática hasta que tenga 17 años". Lagrange se refería a las Matemáticas superiores. En otra ocasión exclamó: "Si no os apresuráis a dar a Agustín una sólida educación literaria, sus gustos le alejarán de ella, y será un gran matemático, pero no sabrá como escribir su propio idioma". El padre siguió el consejo del gran matemático de la época, y dio a su hijo una sólida educación literaria antes de permitirle dedicarse a las Matemáticas superiores.

Después de que el padre había hecho por el muchacho todo lo que estaba en su mano, Cauchy ingresó en la Escuela Central del Panteón a la edad de 13 años. Napoleón había instituido diversos premios en la Escuela, y una especie de premio general para todas las escuelas de Francia de la misma clase. Desde el principio, Cauchy fue el astro de la Escuela, obteniendo los primeros premios en griego, composición latina y verso latino. Al dejar la escuela, en 1804, ganó el premio general a que nos hemos referido, y un premio especial en humanidades. El mismo año Cauchy recibió su primera comunión, una ocasión solemne en la vida de cualquier católico, y todavía más solemne para él.

En los 10 meses siguientes estudió Matemática intensamente con un gran profesor, y en 1805, teniendo 16 años pasó a segundo año en la Politécnica. Su vida no fue muy feliz entre aquellos jóvenes excéntricos, que se burlaban de él sin piedad cuando hacía exhibición pública de sus creencias religiosas. Pero Cauchy mantenía sus opiniones, y hasta intentó convertir a alguno de sus burladores.

Desde la Politécnica, Cauchy pasó a la Escuela de Ingenieros Civiles *(Ponts et Chaussés)* en 1807. Aunque sólo tenía 18 años, superó fácilmente a muchachos de 20, que ya habían pasado dos años en la Escuela. Para completar su enseñanza, Cauchy fue nombrado, en marzo de 1810, para una importante misión. Su talento y audaz originalidad le señalaban como un hombre para quien no existían obstáculos ni peligros.

En marzo de 1810, cuando Cauchy abandonó París, con escaso equipaje pero lleno de esperanzas, y se dirigió a Cherburgo para desempeñar su primera misión, la batalla de Waterloo (18 de junio de 1815), todavía tardaría cinco años en producirse, y Napoleón confiaba aún en asir Inglaterra por el cuello y hacerla morder el polvo. Antes de que pudiera ser intentada la invasión, era necesario construir una enorme flota. Puertos y fortificaciones, para defender los astilleros de los ataques de los marinos ingleses, constituían el primer requisito para llevar a la práctica lo deseado. Cherburgo era, por muchas razones, el punto lógico para comenzar todas las grandiosas operaciones necesarias para apresurar el "día de gloria", que los franceses anunciaban desde la caída de la Bastilla. De aquí que el joven e inteligente Cauchy fuera enviado a Cherburgo, para que llegara a ser un gran ingeniero militar.

En su escaso equipaje, Cauchy llevaba únicamente cuatro libros, la *Mécanique celeste* de Laplace, el *Traité des fonctions analytiques* de Lagrange, la *Imitación de Cristo*, de Thomas Kempis y un ejemplar de las obras de Virgilio, rara biblioteca para un joven y ambicioso ingeniero militar. El tratado de Lagrange iba a ser el libro que transformarla en realidad la profecía de su autor, cuando dijo: "Este joven nos suplantará a todos", pues incitó a Cauchy a buscar alguna teoría de las funciones exenta de los evidentes defectos de la teoría de Lagrange.

El tercer libro mencionado, produjo algunos disgustos a Cauchy, pues con él, y su agresiva religiosidad, excitó los nervios de sus prácticos colaboradores, que estaban ansiosos de ver cómo podían conciliar sus opiniones con una tarea que significaba destrucción. Pero Cauchy pronto les demostró, al ofrecerles la otra mejilla, que al menos había leído el libro. Pronto olvidarás todo eso, le aseguraron. Pero Cauchy replicó preguntándoles suavemente en qué punto era errónea su conducta para poder corregirla. No se conoce la respuesta que recibió esta pregunta.
Los rumores de que su querido hijo se estaba transformando en un infiel o algo peor, llegó a los oídos de su angustiada madre. En una carta suficientemente larga y suficientemente llena de sentimientos piadosos para calmar a todas las madres que tienen a sus hijos al frente o en cualquier lugar semejante, Cauchy la tranquilizó, y la madre se sintió nuevamente feliz. La conclusión de la carta muestra que el santo Cauchy era capaz de mantener sus propias ideas contra sus atormentadores, aunque sus bromas le tuvieran casi enloquecido.
"Es ridículo suponer que la revolución pueda trastornar a alguien la cabeza, y si todos los locos fueran enviados a los manicomios, allí se encontrarían más filósofos que cristianos". ¿Incurre Cauchy en un desliz o quiere decir realmente que ningún cristiano es filósofo? Más tarde añade: "Pero ya es bastante: es más provechoso para mí trabajar en ciertas memorias sobre Matemática". Precisamente, cada vez que veía un molino agitando sus gigantescos brazos bajo el cielo.
Cauchy permaneció alrededor de tres años en Cherburgo. Aparte de sus deberes con el cielo, su tiempo fue muy bien empleado. En una carta fechada el 3 de julio de 1811, describe así su atareada vida. "Me levanto a las cuatro y trabajo desde la mañana hasta la noche. Mi labor diaria ha aumentado este mes por la llegada de los prisioneros españoles. Fuimos avisados con sólo ocho días de anticipación y durante esos ocho días, hemos tenido que construir barracas y preparar camas de campaña para 1.200 hombres... Finalmente, nuestros prisioneros han quedado alojados bajo techado desde hace dos días. Tienen camas, alimento y se consideran muy afortunados... El trabajo no me fatiga; por el contrario me fortalece, y me encuentro en perfecta salud".
A pesar de este intenso trabajo *pour la gloire de la belle France,* Cauchy todavía tenía tiempo para sus investigaciones. A primeros de diciembre de 1810 se dedicó a "repasar todas las ramas de la Matemática, comenzando por la Aritmética y terminando con la astronomía, aclarando puntos oscuros y aplicando [mis propios métodos] para la simplificación de las demostraciones y el descubrimiento de nuevas proposiciones". En fin, este sorprendente muchacho encontró tiempo para instruir a quienes solicitaban sus lecciones para ascender en su profesión, y también ayudó al alcalde de Cherburgo en los exámenes escolares. En esta forma aprendió a enseñar. Aun le restaron algunos momentos para dedicarse a sus distracciones.
El fracaso de Moscú en 1812, la guerra contra Prusia y Austria, la batalla de Leipzig, en octubre de 1813, desviaron la atención de Napoleón de su sueño de invadir Inglaterra, y las obras de Cherburgo languidecieron. Cauchy volvió a París en 1813, fatigado por el exceso de trabajo. Tenía entonces 24 años; pero atrajo la atención de los principales matemáticos de Francia por sus brillantes investigaciones, particularmente por su memoria sobre los poliedros y por otra sobre las funciones simétricas. Como ambos temas pueden comprenderse fácilmente, y ambos ofrecen sugestiones de suma importancia para la Matemática actual, los explicaremos brevemente.
La primera memoria es de escaso interés en sí misma. Lo que tiene importancia, al ser considerada actualmente, es la extraordinaria agudeza de la crítica que Malus hizo de ella. Por una curiosa coincidencia histórica, Malus estuvo exactamente un siglo a la cabeza de su época al objetar el razonamiento de Cauchy en la forma precisa en que lo hizo. La Academia había propuesto como problema para el premio el siguiente tema*: "Perfeccionar en algún punto esencial la teoría de poliedros",* y Lagrange consideró que esta investigación era muy adecuada

para que fuera emprendida por el joven Cauchy. En febrero de 1811, Cauchy escribió su primera memoria sobre la teoría de poliedros. En ella se responde negativamente a la cuestión planteada por Poinsot (1777-1859): ¿Es posible que haya más poliedros regulares que los que tienen 4, 6, 8, 12, 16 y 20 caras? En la segunda parte de su memoria Cauchy amplía la fórmula de Euler que se encuentra en los manuales de Geometría, relacionando el número de aristas (*A*), caras (*C*) y vértices (*V*) de un poliedro,

$$A + 2 = C + V$$

Esta obra fue impresa. Legendre la consideró como muy importante y alentó a Cauchy a que la continuara. Así lo hizo éste en una segunda memoria (enero, 1812). Legendre y Malus (1775-1812) eran los jueces. Legendre estaba muy entusiasmado y predijo grandes triunfos para el joven autor, pero Malus se mostró más reservado.

Étienne-Louis Malus no era un matemático profesional, sino un ex-oficial de ingenieros en las campañas de Napoleón en Alemania y Egipto, que se hizo famoso por su casual descubrimiento de la polarización de la luz por reflexión. Posiblemente sus objeciones fueron consideradas por el joven Cauchy como una crítica capciosa, que era de esperar en un obstinado físico. Para demostrar sus teoremas más importantes, Cauchy usó el método de reducción al absurdo, familiar a todos los principiantes en Geometría. Las objeciones de Malus se referían este método de prueba.

Para probar una proposición por el absurdo se deduce una contradicción con la falsedad aceptada de la proposición; y entonces, según la lógica aristotélica, se concluye que la proposición es falsa. Cauchy no pudo responder a la objeción dando demostraciones directas, y Malus lo hizo, aunque no estaba convencido de que Cauchy hubiera probado algo. Cuando lleguemos a la conclusión de toda esta historia (en el último capítulo), veremos que la misma objeción ha sido hecha en otras cuestiones por los intuicionistas. Si Malus no pudo convencer a Cauchy en 1812, fue vengado por Brouwer en 1912 cuando éste consiguió que los sucesores de Cauchy comprendieran que en el Análisis matemático existe un punto que debe ser examinado cuidadosamente. La lógica aristotélica, como Malus dijo a Cauchy, no siempre es un método seguro de razonamiento matemático.

Ocupándonos ahora de la *teoría de sustituciones,* iniciada sistemáticamente por Cauchy y elaborada por él en una larga serie de trabajos a partir de 1840, que llega a su completo desarrollo en la *teoría de grupos finitos,* podemos presentar los conceptos fundamentales con un simple ejemplo. De todos modos, describiremos en primer término, a grandes rasgos, las propiedades principales de un *grupo de operaciones.*

Las operaciones pueden ser indicadas con letras mayúsculas *A, B, C, D,...,* y el resultado de dos operaciones sucesivas, es decir, *A* en primer término, *B* en segundo, serán indicadas por una posición adecuada, es decir *AB*. Obsérvese también que *BA*, según lo que hemos dicho, significa que *B* se realiza en primer término y *A* en segundo; de modo que *AB y BA* no son necesariamente la misma operación. Por ejemplo *si A* es la operación de "añadir 10 a un número dado" y *B* es la operación de "dividir un número dado por 10, *AB* aplicado a *x* da

$$\frac{x+10}{10}$$

mientras *BA* da

$$\frac{x}{10}+10=\frac{x+100}{10}$$

y las fracciones resultantes son desiguales; de aquí que AB *y BA* sean diferentes.
Si el resultado de dos operaciones *X*, *Y* son los mismos, se dice que *X e Y son iguales (o equivalentes),* y esto se expresa escribiendo *X = Y.*
El siguiente concepto fundamental es el de la *asociación. Si* en cualquier sistema de tres operaciones, *U, V, W* se verifica *(UV) W = U(VW),* se dice que el conjunto de esas operaciones satisface la ley *asociativa.* (UV)W expresa que *UV* se realiza primero, y luego, conociendo el resultado, se realiza *W; U(VW)* significa que U se realiza primero, y luego, conociendo el resultado, se realiza *VW.*
El último concepto fundamental es el de *operación idéntica* o identidad; una operación *I* que no produce cambios cuando actúa se llama la *identidad.*
Con estos conceptos podemos enunciar los simples postulados que definen un grupo de operaciones.
Un conjunto de operaciones *I, A, B, C,... X, Y,...* se dice que forma un *grupo si* quedan satisfechos los postulados (1) - (4).

1. Existe una regla combinatoria aplicable a cualquier par *X, Y* de operaciones[1] del conjunto dado, tal que el resultado, representado por *X Y,* de combinar *X* con *Y* en este orden, de acuerdo con la regla es una operación unívocamente determinada del conjunto.
2. Para cualquier *sistema* de operaciones *X, Y, Z,* del conjunto, la regla (1) es asociativo; o sea *(XY)Z = X(YZ).*
3. Existe una operación única *I* en el conjunto, de tal modo que para toda operación *X* perteneciente a él, es *IX = XI = X.*
4. Si *X* es cualquier operación del conjunto, existe en él, una operación única *X*', tal que *XX*' = *I* (puede ser fácilmente probado que también *X'X = I).*

Estos postulados contienen redundancias deducibles partiendo de otros enunciados de (1) - (4), pero en la forma mencionada los postulados son más fáciles de comprender. Para ilustrar un grupo consideraremos un ejemplo muy sencillo, relativo a las permutaciones de las letras. Esto podrá parecer trivial, pero tal permutación o sustitución de grupos constituye la clave tanto tiempo buscada de la resolución algebraica de las ecuaciones. .
Existen precisamente seis maneras de escribirlas tres letras *a, b, c*, o sea

abc, acb, bca, bac, cab, cba.

Tomemos cualquiera de estas permutaciones, por ejemplo la primera *abc*, como el orden inicial. ¿Mediante qué permutaciones de las letras podemos pasar desde ésta a las otras cinco disposiciones? Para pasar de *abc* a *acb* es suficiente intercambiar o permutar *b* y *c*. Para indicar la operación de permutar *b y c*, escribimos (*bc*), que se lee "*b en lugar de c y c en lugar de b*". De *abc* pasamos a *bca*, poniendo *a* en lugar de *b*, *b* en lugar de *c*, y *c* en lugar de *a*, lo que se escribe (*abc*). El mismo orden *abc* se obtiene a partir de *abc* sin ningún cambio, o sea *a* en lugar de *a, b* en lugar de *b, c* en lugar de *c*, que es la sustitución idéntica, y se denota por *I.* Procediendo de modo análogo con las seis permutaciones

[1] Las operaciones de un par pueden ser la misma operación; así *X, X*

abc, acb, bca, bac, cab, cba,

tendremos las sustituciones correspondientes,

I, (bc), (abc), (ab), (acb), (ac)

La "regla combinatoria" en los postulados es aquí la siguiente. Tómense dos cualesquiera de las sustituciones, por ejemplo (*bc*) y (*acb*), y consideremos el efecto de éstas aplicado sucesivamente en el orden enunciado, o sea (*bc*) primero y (*acb*) segundo: (*bc*) coloca b en lugar de *c*, entonces (*acb*) coloca *c* en lugar de *b*. Por tanto *b* se deja como estaba. Tomemos la siguiente letra, *c*, en (*bc*): por *(be), c* se coloca en lugar de *b*, la que por (*aeb*) se coloca en lugar de *a*; por tanto, *c* se coloca en lugar de *a*. Continuando, veremos como *a* es ahora colocada: (*be*) deja a como estaba; pero (*a,b*) coloca *a* en lugar de *c*. Finalmente, el efecto total de (*be*) seguido por (*acb*) será (*ca*), lo que se indica escribiendo (*bc*) (*acb*) (*ca*) (*ac*).
En la misma forma se comprueba fácilmente que

(acb) (abc) (abc) (acb) = I;
(abc) (ac) (ab); (be) (ac) = (acb),

y así sucesivamente para todos los pares posibles. Así, el postulado (1) se satisface para estas seis sustituciones, y puede comprobarse que también (2), (3), (4) quedan satisfechos.
Todo esto se resume en la "tabla de multiplicación del grupo", que puede componerse representando las sustituciones por las letras escritas bajo ellas (para ganar espacio),

I	*bc*	*abc*	*ab*	*acb*	*ac*
I	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*

Para usar la tabla una letra, por ejemplo *C*, se busca en la columna del lado izquierdo, y otra letra, por ejemplo *D*, en la fila superior, y el lugar *A*, donde se cortan la fila y la columna correspondiente, es el resultado *CD. Así CD A, DC = E, EA B,* y así sucesivamente.

	I	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
I	*I*	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
A	*A*	*I*	*C*	*B*	*E*	*D*
B	*B*	*E*	*D*	*A*	*I*	*C*
C	*C*	*D*	*E*	*I*	*A*	*B*
D	*D*	*C*	*I*	*E*	*B*	*A*
E	*E*	*B*	*A*	*D*	*C*	*I*

Como ejemplo podemos comprobar la ley asociativa *(AB)C = A (BC),* lo que sería igual. Primero *AB = C;* luego *(AB)C = CC = I*. Por otra parte *BC = A*; por tanto *A (BC) = AA* = I. En la misma, forma *A (DB) = AI = A; (AD)B = EB = A*; por tanto *(AD)B A (DB)*

El número total de operaciones diferentes de un grupo se llama su orden. Aquí 6 es el orden del grupo. Examinando el cuadro elegiremos varios *subgrupos,* por ejemplo,

	I
I	*I*

;

	I	*A*
I	*I*	*A*
A	*A*	*I*

;

	I	*B*	*D*
I	*I*	*B*	*D*
B	*B*	*D*	*I*
D	*D*	*I*	*B*

que son de los órdenes respectivos 1, 2, 3. Esto ilustra uno de los teoremas fundamentales demostrados por Cauchy: *El orden de* cualquier *subgrupo es un divisor del orden del grupo.*
El lector puede entretenerse intentando la construcción de grupos de órdenes que no sean 6. Para un orden dado, el número de grupos diferentes (que tienen tablas de multiplicación diferentes) es finito, pero no se sabe cuál podrá ser este número para cualquier orden dado (el orden general n), ni probablemente podrá conocerse en nuestra época. De modo que desde el comienzo de una teoría, que examinada superficialmente es tan sencilla como el dominó, llegamos a problemas no resueltos.
Después de haber construido la "tabla de multiplicación" de un grupo, olvidaremos su derivación de las sustituciones, y consideraremos la tabla como definidora de un *grupo abstracto.* Es decir, los símbolos *I, A, B,...* no dan una interpretación más allá de la indicada por la regla combinatoria, como en *CD = A, DC = E,* etc. Este punto de vista abstracto es ahora corriente. No era el de Cauchy, pues fue propuesto por Cayley en 1854. Tampoco fue enunciado un conjunto completamente satisfactorio de postulados hasta la primera década del siglo XX.
Cuando las operaciones de un grupo son interpretadas como sustituciones, o como las rotaciones de un cuerpo rígido, o en cualquier otra sección de las Matemáticas, a la cual sean aplicables los grupos, la interpretación se denomina, una aplicación del grupo *abstracto* definido por la tabla de multiplicación. Un grupo abstracto determinado puede tener muy diferentes aplicaciones. Esta es una de las razones para que los grupos sean de fundamental importancia en la Matemática me<Ierna: una *estructura básica abstracta* (la resumida en la tabla de multiplicación) de uno y el mismo grupo es la esencia de diversas teorías al parecer inconexas, y por un intenso estudio de las propiedades del grupo abstracto, se obtiene, mediante una investigación en lugar de varias, un conocimiento de las teorías en cuestión y de sus relaciones recíprocas.
Para citar un ejemplo diremos que el conjunto de todas las rotaciones de un icosaedro regular (sólido regular de 20 caras) alrededor de sus ejes de simetría, de modo que después de cada rotación del conjunto el volumen del sólido ocupe el mismo espacio que antes, forma un grupo, y este grupo de rotaciones, cuando se expresa abstractamente, es el mismo grupo que el que aparece en las permutaciones de las raíces cuando intentamos resolver la ecuación general de quinto grado. Además, este mismo grupo (anticipándonos algo) aparece en la teoría de funciones elípticas. Esto permite pensar que aunque es imposible resolver algebraicamente la quíntica general, la ecuación puede ser, y en efecto es, resoluble mediante las funciones mencionadas. Finalmente, todo este proceso puede ser expuesto geométricamente describiendo las rotaciones de un icosaedro ya mencionadas. Esta bella unificación fue la obra de Félix Klein (1849-1925) en su memoria sobre el icosaedro (1884).
Cauchy fue uno de los grandes precursores de la teoría de grupos de sustituciones. Desde ese día se han realizado numerosos trabajos sobre la cuestión, y la teoría misma se ha extendido notablemente por la consideración de *grupos infinitos:* grupos que tienen una infinidad de

operaciones que pueden ser numeradas 1, 2, 3,... y además, de grupos de movimientos continuos. En los últimos una operación del grupo traslada un cuerpo hacia otra posición por desplazamientos infinitesimales (arbitrariamente pequeños), a diferencia del grupo icosaedro antes aludido donde las rotaciones desplazan todo el cuerpo en una cantidad finita. Esta es una categoría de grupos infinitos (la terminología aquí no es exacta, pero es suficiente para demostrar una cuestión de importancia, la distinción entre grupos discontinuos y continuos). Lo mismo que la teoría de grupos discontinuos finitos es la estructura básica de la teoría de ecuaciones algebraicas, así también la teoría de grupos continuos infinitos es de gran utilidad en la teoría de ecuaciones diferenciales, que son de máxima importancia en física matemática. Al estudiar los grupos, Cauchy no hizo una obra inútil.

Para terminar esta explicación de los grupos podemos indicar que los grupos de sustituciones estudiados por Cauchy intervienen en la moderna teoría de la estructura atómica. Una sustitución, por ejemplo (xy), que contenga precisamente dos letras en su símbolo, se llama una *transposición.* Se demuestra fácilmente que cualquier sustitución es una combinación de transposiciones. Por ejemplo,

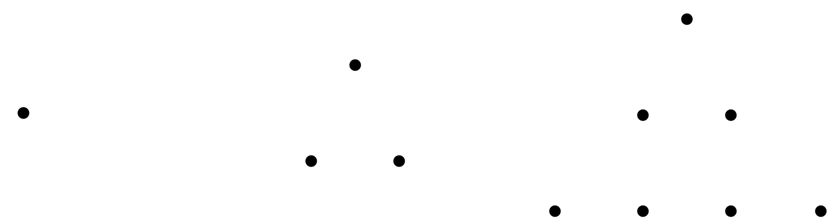
$$(abcdef) = (ab)\ (ac)\ (ad)\ (ae)\ (af)$$

de donde se deduce claramente la regla de escribir cualquier sustitución por medio de transposiciones.

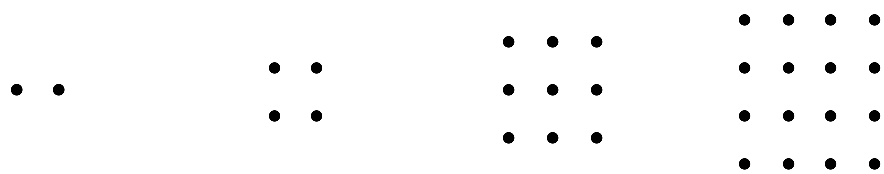
Es una hipótesis razonable suponer que los electrones en un átomo son idénticos, es decir, un electrón no puede distinguirse de otro. Por tanto, si en un átomo dos electrones se intercambian, el átomo permanecerá invariable. Supongamos, para mayor sencillez, que el átomo contiene precisamente tres electrones *a, b, c. Al grupo de sustituciones a, b, c* (para el cual hemos dado la tabla de multiplicación) corresponderán todos los intercambios de electrones que dejan el átomo invariable, como era. De esto hasta las líneas espectrales de la luz emitida por un gas excitado compuesto de átomos parece que existe una gran distancia, pero el paso ha sido dado, y una escuela de especialistas en mecánica cuántica ha encontrado una base satisfactoria para la interpretación de los espectros (y de otros fenómenos asociados con la estructura atómica) en la teoría de grupos de sustitución. Como es natural, Cauchy no pudo prever tales aplicaciones de la teoría que estaba creando, ni tampoco previó su aplicación a los notables enigmas de las ecuaciones algebraicas. Este triunfo estaba reservado para un muchacho de menos de veinte años, como más tarde veremos.

Teniendo veintisiete años (1816), Cauchy se colocó en la primera fila de los matemáticos de su época. Su único rival serio era el reticente Gauss, doce años mayor que él. La memoria de Cauchy, de 1814, sobre la integral definida con un número complejo como límite, inició su gran carrera como creador independiente y como inigualado reformador de la teoría de funciones de variable compleja. Para los términos técnicos remitimos al lector al capítulo sobre Gauss, quien llegó al teorema fundamental en 1811, tres años antes que Cauchy. La detallada memoria de Cauchy sobre la cuestión fue publicada en 1827. El retraso fue debido posiblemente a la extensión de la obra, aproximadamente 180 páginas. Cauchy no podía pensar en obras muy extensas, pues la Academia o la Politécnica disponían de muy escasos fondos para imprimirlas.

El año siguiente (1815) Cauchy produjo una gran conmoción al demostrar uno de los grandes teoremas que Fermat había legado a la posteridad: Todo número entero positivo es una suma de tres "triángulos", cuatro "cuadrados", cinco "pentágonos", seis "hexágonos", y así sucesivamente; el cero en cada caso es contado como un número del tipo correspondiente. Un "triángulo" es uno de los números 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, ...obtenidos construyendo triángulos regulares (equiláteros) mediante puntos,



etc.; los "cuadrados" se construyen de un modo análogo, donde se aprecia evidentemente la manera de obtener cada cuadrado del anterior.



De modo análogo, los "pentágonos" son pentágonos regulares construidos por puntos; y lo mismo para los "hexágonos" y para el resto. Esto no era fácil de demostrar. En efecto, no había sido posible para Euler, Lagrange y Legendre. Gauss lo pudo probar para el caso de los "triángulos". Como si se propusiera demostrar que no se limitaba a los trabajos de Matemática pura, Cauchy obtuvo el Gran Premio ofrecido por la Academia, en 1816, para una "teoría de la propagación de las ondas sobre la superficie de un fluido pesado de profundidad indefinida"; las ondas del océano están cercanas a este tipo para el tratamiento matemático. Este trabajo, cuando fue impreso, llenaba más de 300 páginas. Teniendo 37 años Cauchy fue considerado como candidato a la Academia de Ciencias. Un honor desusado para un hombre tan joven. Le correspondería, según le aseguraban, la primera vacante de la sección Matemática. Por lo que se refiere a su popularidad, la carrera de Cauchy estaba en su punto máximo.

En 1816, Cauchy estaba, pues, maduro para ser elegido académico, pero no había vacantes. De todos modos era de esperar que dos de los sillones quedaran pronto vacíos, dada la edad de sus ocupantes. Monge tenía 70 y L. M. N. Carnot 63 años. De Monge ya hemos hablado; Carnot fue un precursor de Poncelet, y debía su sillón de la Academia a sus investigaciones que restablecieron y ampliaron la Geometría sintética de Pascal y Desargues, y a su heroico intento de colocar el Cálculo sobre un firme fundamento lógico. Aparte de la Matemática, Carnot se había hecho un nombre envidiable en Francia por ser quien, en 1793, organizó 14 cuerpos de ejército para derrotar al medio millón de tropas lanzadas contra Francia por los reaccionarios antidemocráticos unidos de Europa. Cuando Napoleón se apoderó del Poder en 1796, Carnot se opuso al tirano: "Soy un enemigo irreconciliable de todos los reyes", dijo Carnot. Después de la campaña rusa de 1812, Carnot ofreció sus servicios como soldado, pero con una condición: combatiría por Francia, no por el Imperio francés de Napoleón.

En la reorganización de la Academia de Ciencias durante el movimiento político de los Cien Días gloriosos de Napoleón, después de que éste escapó de la isla de Elba, Carnot y Monge fueron expulsados. El sucesor de Carnot ocupó su sillón sin que nada se dijera, pero cuando el joven Cauchy se sentó tranquilamente en el sillón de Monge, la tormenta estalló. La expulsión de

Monge fue una indecencia política, y quien se aprovechara de ello demostraba, al menos, no poseer una fina sensibilidad. Cauchy, sin embargo, creía firmemente en sus derechos y obedecía a su conciencia.

Se dice que el hipopótamo tiene un tierno corazón, y así lo afirman los que han probado ese delicado manjar, de modo que una gruesa piel no es necesariamente un índice en el que pueda confiarse para juzgar el interior de un hombre. Rindiendo culto a los Borbones y creyendo que la dinastía significaba la directa representación que los cielos enviaban para gobernar a Francia, hasta cuando el enviado del cielo era un payaso como Carlos X, Cauchy creía ser leal a los cielos y a Francia cuando ocupó el sillón de Monge. Su conducta posterior con el santificado Charles demuestra que era sincero cuando procedió así.

Posiciones honrosas e importantes le fueron ofrecidas al más grande matemático de Francia antes de que cumpliera los 30 años. Desde 1815 (cuando tenía 26 años), Cauchy explicaba Análisis en la Politécnica. Ahora era ya profesor, y no pasó mucho tiempo sin que fuera también nombrado miembro del Colegio de Francia y de la Sorbona. Todas las cosas seguían su rumbo. Su actividad matemática era increíble, y algunas veces presentó ante la Academia, en la misma semana, dos largos y documentados trabajos. Aparte de sus propias investigaciones, escribió numerosos informes sobre los trabajos que otros autores presentaban a la Academia, y encontró tiempo para mantener una corriente constante de pequeños estudios referentes a todas las ramas de la Matemática pura y aplicada. Llegó a ser más conocido que Gauss por los matemáticos de Europa. Tanto los sabios como los estudiantes acudían a oír sus bellas y claras exposiciones de las nuevas teorías que habían creado, particularmente en el análisis y en la física matemática. Entre sus oyentes, se encontraban matemáticos bien conocidos de Berlín, Madrid y San Petersburgo.

En medio de este trabajo, Cauchy encontró tiempo para el amor. Su prometida, Aloise de Bure, con quien se casó en 1818 y con la que vivió casi 40 años, era la hija de una antigua y culta familia, y también una ardiente católica. Tuvo dos hijas que fueron educadas como Cauchy lo había sido.

En este período debe hacerse notar una gran obra. Alentado por Laplace y otros sabios, Cauchy, en 1821, redactó para su publicación el curso de conferencias sobre Análisis que había pronunciado en la Politécnica. Esta es la obra donde se establece el rigor matemático. También en nuestros días las definiciones de Cauchy de límite y de continuidad, y mucho de lo que escribió acerca de la convergencia de series infinitas en este curso de conferencias, se encuentran reproducidas en cualquier libro que trate de Cálculo infinitesimal. Algunos párrafos del prólogo muestran lo que Cauchy pensaba y lo que realizó. "He intentado dar a los métodos [del Análisis] todo el rigor que se exige en Geometría, de tal forma que jamás haya que referirse a las razones deducidas de la generalidad del Álgebra (actualmente diríamos el formalismo del Álgebra). Razones de este tipo, aunque de ordinario admitidas, sobre todo en el paso de las series convergentes a las divergentes y de las cantidades reales a las imaginarias, tan sólo pueden ser consideradas, en mi opinión, como inducciones, que algunas veces sugieren la verdad, pero que no están siempre de acuerdo con la pretendida exactitud de la Matemática. Debemos también observar que tienden a atribuir una validez indefinida a las fórmulas algebraicas[2], aunque, en realidad, la mayoría de estas fórmulas sólo subsisten bajo ciertas condiciones, y para ciertos

---

[2] Por ejemplo, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ hasta el infinito, obtenido dividiendo 1 por (1 – x), carece de sentido si *x* es un número positivo igual 0 mayor que 1.

valores de las cantidades que contienen. Determinando estas condiciones y valores, y fijando precisamente la significación de las notaciones de que hago uso, eliminaré toda inseguridad".

La fecundidad de Cauchy era tan prodigiosa que tuvo necesidad de redactar una especie de diario, que denominó *Exercises de Mathéma*tiques (1826-1830) y que continuó en una segunda serie denominada *Exercises d'Analyse Mathématique et de Physique*, para la publicación de sus obras originales de Matemática pura y aplicada. Estos trabajos han sido ardientemente buscados y estudiados, y contribuyeron en mucho a reformar los gustos matemáticos antes de 1860.

Un aspecto de la terrible actividad de Cauchy es bastante divertido. En 1835 la Academia de Ciencias comenzó a publicar su boletín semanal. (Los *Comptes rendus*). Aquí Cauchy encontró un terreno virgen, y comenzó a inundar la nueva publicación con notas y largas memorias, algunas veces más de una cada semana. Asombrados por el alto precio de la impresión, la Academia dictó una medida, que subsiste actualmente, prohibiendo la publicación de artículos de más de cuatro páginas. Esta medida mutiló el estilo brillante de Cauchy, y sus largas memorias, incluyendo una muy extensa de 300 páginas sobre la teoría de números, fueron publicadas en otra parte.

Feliz en su matrimonio y tan prolífico en sus investigaciones como salmón en la época del desove, Cauchy se sentía satisfecho cuando la revolución de 1830 destronó a su amado Carlos. El destino jamás lanzó una carcajada más sincera que cuando Cauchy abandonó el sillón de Monge en la Academia para seguir a su amado rey en el exilio. Cauchy no podía desobedecer al destino: había hecho un solemne juramento de fidelidad a Carlos, y para Cauchy un juramento era un juramento, aun cuando el juramento fuera una estupidez. Cauchy, a la edad de 40 años, renunció a todos sus cargos y se sometió a un exilio voluntario.

No estaba en realidad apesadumbrado, pues las calles ensangrentadas de París alteraban su sensible estómago. Creía firmemente que el buen rey Carlos no tenía responsabilidad alguna de estos sangrientos acontecimientos.

Dejó su familia en París, pero no renunció a su sillón en la Academia, y Cauchy marchó primeramente a Suiza, buscando distracción en conferencias e investigaciones científicas. Jamás pidió el más leve favor a Carlos, y no se sabe si el exilado rey se dio cuenta de su capacidad de sacrificio por una cuestión de principios. Carlos Alberto, Rey de Cerdeña, algo más inteligente que Carlos, oyó decir que el renombrado Cauchy había abandonado sus cargos y le nombró profesor de Física Matemática en Turín. Cauchy se sintió feliz; aprendió rápidamente el italiano y pronunció sus conferencias en ese idioma.

Debido al exceso de trabajo y a las desazones sufridas cayó enfermo, y con gran disgusto (según escribía a su mujer) se vio forzado a abandonar todos los trabajos durante cierto tiempo. Unas vacaciones en Italia y una visita al Papa le restablecieron completamente y volvió a Turín, pensando en una larga vida dedicada a la enseñanza y a la investigación. Pero entonces, el obtuso Carlos X tuvo noticia de la vida retirada del matemático, e intentando premiar a su leal partidario le hizo un singular disfavor. En 1833 Cauchy fue encargado de la educación del heredero de Carlos, el duque de Burdeos, que por entonces tenía 13 años. Ese cargo, mezcla de institutriz y de tutor elemental, era el que menos podía ambicionar Cauchy. De todos modos, por su fidelidad a Carlos, le siguió a Praga cargando sobre sus hombres la cruz de la lealtad. Al año siguiente se unió con su familia.

La educación del heredero de los Borbones no era una sinecura. Desde la mañana hasta la noche, con escaso tiempo para las comidas, Cauchy tenía que cuidarse de este mocoso real. No sólo debía repetir las lecciones elementales propias de una escuela ordinaria, sino que Cauchy tenía que cuidar de que el mimado jovenzuelo no se cayera y no se hiriera las rodillas en sus piruetas por el parque. No hay ni que decir que la mayor parte de la instrucción dada por Cauchy consistía en charlas íntimas sobre la rama particular de filosofía moral tan amada por Cauchy. Afortunadamente Francia decidió desprenderse de los Borbones, y dejar que sus innumerables descendientes constituyeran el premio de la rifa de maridos para las hijas de millonarios.

A pesar de la constante atención prestada a su discípulo, Cauchy se las arregló para continuar trabajando en sus Matemáticas, retirándose a sus habitaciones privadas durante algunos momentos para establecer alguna fórmula o garrapatear algún párrafo. La obra más importante de este período fue su larga memoria sobre la dispersión de la luz, en la que Cauchy intentó explicar el fenómeno de la dispersión (la separación de la luz blanca en luces de colores, debido a la diferente refrangibilidad de las luces coloreadas que componen la blanca), sobre la hipótesis de que la luz es causada por las vibraciones de un medio elástico. Esta obra, de gran interés en la historia de la física, nos muestra la tendencia del siglo XIX a explicar los fenómenos físicos siguiendo normas mecánicas, en lugar de construir simplemente una teoría matemática abstracta que relacione las observaciones. Esta era una desviación de la práctica dominante desde los tiempos de Newton y sus sucesores, y se habían hecho ya ensayos para "explicar" mecánicamente la gravitación.

En la actualidad la tendencia sigue la dirección opuesta hacia una correlación matemática pura y un completo abandono del éter, de los medios elásticos, o de otras "explicaciones" mecánicas más difíciles de comprender que lo que se intenta explicar. Los físicos actualmente parecen haber oído la pregunta de Byron". ¿Quién, pues, explicará la explicación?". La teoría del medio elástico tuvo un largo y brillante triunfo, y también en nuestros días se usan algunas de las fórmulas deducidas por Cauchy de su falsa hipótesis. Pero la teoría misma fue abandonada cuando, como no es raro que ocurra, la técnica experimental refinada y los fenómenos no sospechados (la dispersión anómala en este caso) no estaban de acuerdo con las predicciones de la teoría.

Cauchy abandonó a su discípulo en 1838, cuando Cauchy tenía casi 50 años). Hacía tiempo que los amigos de París le pedían que volviera, y Cauchy se valió de la excusa de las bodas de oro de sus padres para despedirse de Carlos y de su séquito. Por una dispensa especial, los miembros del Instituto (del cual la Academia de Ciencias era y es parte) no estaban obligados a hacer un juramento de fidelidad al gobierno, y por ello Cauchy recuperó su sillón. Por entonces su actividad fue mayor que nunca. Durante los últimos 19 años de su vida escribió más de 500 trabajos de todas las ramas de la Matemática, incluyendo la mecánica, la física y la astronomía. Muchos de esos trabajos eran largos tratados.

De todos modos sus desazones todavía se prolongaron. Cuando se produjo una vacante en el Colegio de Francia, Cauchy fue unánimemente elegido para ocupar la plaza. Pero en este caso no estaba establecida la dispensa, y antes de obtener el cargo Cauchy tenía que pronunciar el juramento de fidelidad. Creyendo que el gobierno había usurpado los derechos divinos de su señor, Cauchy se negó a prestar el juramento. Una vez más tuvo que abandonar sus tareas. Pero el *Bureau des Longitudes* necesitaba de un matemático de su calibre, y fue elegido por unanimidad. Entonces comenzó una divertida guerra entre el barón Cauchy y el Bureau por una parte, y el gobierno por otra. Consciente de que estaba cometiendo una necedad, el Gobierno hizo la vista gorda y Cauchy penetró por la puerta falsa en el Bureau sin prestar al juramento. El desafío al gobierno era indudablemente ilegal, pero no puede decirse que fuera una traición, y Cauchy mantuvo su cargo. Sus colegas del Bureau pusieron en mala situación al gobierno desconociendo su pretensión de que eligiera legalmente sus miembros. Durante cuatro años Cauchy volvió obstinadamente su espalda al Gobierno, y continuó sus trabajos. A este período pertenecen algunas de las contribuciones más importantes de Cauchy a la astronomía matemática. Leverrier, involuntariamente, fue el punto de partida de la labor de Cauchy con su trabajo escrito en 1840 acerca de Pallas. Se trataba de una obra larga repleta de cálculos numéricos que exigiría para su comprobación un tiempo no menor que el autor había empleado para realizarlo. Cuando la memoria fue presentada a la Academia hubo que buscar a alguien que voluntariamente se prestase a emprender la tarea sobrehumana de comprobar la exactitud de las conclusiones. Cauchy se prestó, pero en lugar de seguir los pasos de Leverrier, encontró caminos abreviados e inventó nuevos métodos que le permitieron comprobar y ampliar el trabajo en un tiempo extraordinariamente corto.

La pelea con el gobierno hizo crisis en 1843, teniendo Cauchy 54 años. El ministro se negó a seguir siendo objeto de la burla pública y exigió que el Bureau realizara una elección para llenar el cargo que Cauchy se negaba a abandonar. Por consejo de sus amigos Cauchy presentó su caso ante el pueblo en una carta abierta. Esta carta es uno de los escritos más finos que Cauchy redactó durante su vida.

Cualquiera sea nuestro pensamiento acerca de su conducta quijotesca por una causa que hasta los reaccionarios sabían perdida para siempre, no podemos menos de respetar la audacia de Cauchy por mantener su pensamiento con dignidad y sin pasión, luchando por la libertad de su conciencia. Se trataba de la antigua lucha por la libertad del pensamiento en un aspecto que no era familiar entonces, pero que es bastante común ahora.

En la época de Galileo, Cauchy no hubiera dudado en arriesgarse a todos los peligros por mantener la libertad de sus creencias; bajo el reinado de Luis Felipe negó el derecho de cualquier gobierno para exigir un juramento de fidelidad que estaba en contra de su conciencia, y tuvo que sufrir todo género de desazones por su audacia. Su posición le ganó el respeto de todos, incluyendo a sus enemigos, y puso al gobierno en una mala posición hasta para los ojos de quienes le sostenían. Por entonces la estupidez de la represión colocó al gobierno en una situación insostenible, al estallar luchas callejeras, asonadas, tumultos, y en fin la guerra civil. Luis Felipe y toda su pandilla fueron expulsados en 1848. Uno de los primeros actos del gobierno provisional fue abolir el juramento de fidelidad. Con rara perspicacia, los políticos se dieron cuenta de que tales juramentos son innecesarios o indignos. En 1852, cuando Napoleón III subió al trono, el juramento fue restablecido, pero por esta época Cauchy había ganado la batalla, y pudo dedicarse a sus lecciones sin prestar juramento. Por ambas partes se comprendió que era inútil el alboroto. El gobierno no le agradeció su liberalidad y Cauchy nada exigió, pero continuó sus conferencias como si nada hubiera sucedido. Desde entonces hasta el fin de su vida fue la gloria principal de la Sorbona.

Entre la inestabilidad oficial y la estabilidad no oficial Cauchy tuvo tiempo para romper lanzas en defensa de los jesuitas. La cuestión era ya vieja, las autoridades que dirigían la educación del Estado insistían en que la enseñanza de los jesuitas desviaba la fidelidad, mientras los jesuitas defendían que la instrucción religiosa constituía la única base sólida para cualquier educación. Cauchy combatió con gran satisfacción en favor de sus aliados. La defensa de sus amigos era conmovedora y sincera, pero no convincente. Siempre que Cauchy se desviaba de las Matemáticas, sustituía la razón por la emoción.

La guerra de Crimea proporcionó a Cauchy su última oportunidad para ponerse a mal con sus colegas, pues fue un propagandista entusiasta en la singular empresa denominada Obra de las Escuelas del Oriente. "Obra" se entiende aquí en el sentido de una determinada "buena Obra". "Era necesario, según los promotores de la Obra en 1855, remediar los desórdenes del pasado, y al mismo tiempo imponer un doble freno a la ambición moscovita y al fanatismo mahometano: por encima de todo preparar la regeneración de los pueblos brutalizados por el Corán..." En una palabra, la guerra de Crimea era una forma de que las bayonetas preparasen el camino para la Cruz. Profundamente impresionado por la indudable necesidad de reemplazar el brutalizador

Corán por algo más humano, Cauchy se dedicó al proyecto "completando y consolidando... la obra de emancipación tan admirablemente comenzada por las armas de Francia".

Los jesuitas, agradecidos por la experta ayuda de Cauchy, le dieron carta blanca para muchos detalles (incluyendo la obtención de subscripciones), necesarios para cumplir "la regeneración moral de los pueblos esclavizados por las leyes del Corán, y el triunfo del Evangelio en torno a la cuna y al sepulcro de Jesucristo sería la única aceptable compensación de los ríos de sangre que se habían derramado" por los franceses, ingleses, rusos, sardos cristianos y los turcos mahometanos en la guerra de Crimea.

Las buenas obras de este carácter son las que dieron lugar a que algunos de los compañeros de Cauchy, que no sentían simpatía con el espíritu piadoso de la religión ortodoxa de la época, le llamaran relamido e hipócrita. El epíteto era completamente inmerecido, pues Cauchy fue uno de los fanáticos más sinceros que han existido.

El resultado de la Obra fue la matanza de mayo de 1860. Cauchy no llegó a vivir el tiempo necesario para ver coronada su labor.

Las reputaciones de los grandes matemáticos están sometidas a las mismas vicisitudes que la de cualquier otro grande hombre. Durante largo tiempo después de su muerte, y también hoy, Cauchy ha sido gravemente criticado por su excesiva y apresurada labor. Su total producción se remonta a 789 trabajos (muchos de ellos muy extensos) que constituyen 24 grandes volúmenes en cuarto. Las críticas de este tipo se ceban más en los hombres que han realizado una extensa labor de poca importancia al lado de obras de primera categoría, que en aquellos individuos que han hecho relativamente poco y ese poco con una originalidad muy relativa. El papel desempeñado por Cauchy en la moderna Matemática puede decirse que fue esencial, y así fue admitido casi unánimemente, aunque a regañadientes, por casi todos. Después de su muerte, especialmente en las últimas décadas, la reputación de Cauchy como matemático ha aumentado incesantemente. Los métodos que propuso, todo su programa, que inaugura el primer período del moderno rigor, y su casi inigualada capacidad de invención han marcado un jalón para la Matemática, que, como ahora podemos ver, será visible durante muchos años del futuro.

Un detalle, al parecer sin importancia, entre las muchas nuevas cosas debidas a Cauchy puede ser mencionado como un ejemplo de su profética originalidad. En lugar de usar la unidad "imaginario" $i = \sqrt{-1}$, Cauchy propuso realizar todo lo que los números complejos realizan en Matemática valiéndose de las congruencias de módulo $i^2 + 1$. Esta memoria fue realizada en 1847 y atrajo poca atención. Sin embargo, es el germen de algo, el programa de Kronecker que está en camino de revolucionar algunos de los conceptos fundamentales de la Matemática. Como esta cuestión será repetida frecuentemente en otros capítulos, nos contentaremos aquí con dicha alusión.

En el trato social, Cauchy era extraordinariamente cortés, por no decir excesivamente untuoso, por ejemplo, cuando se trataba de solicitar suscripciones para algunas de sus obras preferidas. Sus hábitos eran sobrios, y en todas las cosas, salvo la Matemática y la religión, era hombre moderado. Con respecto a la religión carecía del sentido común ordinario. Todo el que se acercaba a él era un candidato para la conversión. Cuando William Thomson (Lord Kelvin), teniendo 20 años, visitó a Cauchy para discutir problemas matemáticos, éste, gastó algún tiempo intentando convertir al catolicismo a su visitante que entonces era un decidido partidario de la iglesia libre escocesa.

Cauchy se vio envuelto en discusiones acerca de la prioridad, pues sus enemigos le acusaban de no jugar limpio. Sus últimos años se vieron amargados por una seria disputa de la que Cauchy

parecía no hacer caso. Pero con su usual obstinación siempre que se trataba de una cuestión de principios, puso las cosas en su lugar con su invencible dulzura y tenacidad.
Otra peculiaridad aumentó la impopularidad de Cauchy entre sus colegas científicos. En las academias y sociedades científicas se supone que un hombre vota por un candidato teniendo en cuenta sus méritos científicos; cualquier otra cosa es considerada como inmoral. Con justicia o injustamente Cauchy fue acusado de votar de acuerdo con sus credos religiosos y políticos. Sus últimos años fueron amargados lo que Cauchy consideraba una falta de comprensión de sus colegas acerca de ésta y de otras flaquezas semejantes. Ninguna de las partes pudo llegar a comprender los puntos de vista de la otra.
Cauchy murió casi inesperadamente, teniendo 68 años, el 23 de mayo de 1857. Creyendo que la vida en el campo mejoraría un catarro bronquial, dejó la ciudad, pero la fiebre que le afectaba resultó fatal. Pocas horas antes de su muerte habló animadamente con el arzobispo de París de las obras de caridad que proyectaba, la caridad era de las cosas que más interesaban a Cauchy. Sus últimas palabras fueron dirigidas al arzobispo: "Los hombres pasan; pero sus obras quedan”