Capítulo 5

Valor Absoluto

M.Sc. Alcides Astorga M., Lic. Julio Rodríguez S.

Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
...
Revista digital Matemática, educación e internet (www.cidse.itcr.ac.cr)

Créditos

Primera edición impresa:	Rosario Álvarez, 1984.
Edición LaTeX:	Marieth Villalobos, Alejandra Araya, Jessica Chacón, Marianela Abarca, Lisseth Angulo. y Walter Mora.
Colaboradores:	Cristhian Paéz, Alex Borbón, Juan José Fallas, Jeffrey Chavarría
Edición y composición final:	Walter Mora.
Gráficos:	Walter Mora, Marieth Villalobos.
Comentarios y correcciones:	escribir a wmora2@yahoo.com.mx

Contenido

5.1 Ecuaciones e Inecuaciones con valor absoluto

Nuestro objetivo en este capítulo es lograr que el estudiante resuelva ecuaciones e inecuaciones que involucran valor absoluto de expresiones algebraicas de la forma $ax+b$, donde a y b son constantes reales con $a \neq 0$, y x es una variable real.

Para esto conviene recordar la definición de valor absoluto siguiente:

Para cada número real x, se define su valor absoluto (y se denota $|x|$) de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{ccccccc}
|x| & = & x & \text{si} & x & \geq & 0 \\
 & & & \text{o} & & & \\
|x| & = & -x & \text{si} & x & < & 0
\end{array}
$$

Esta definición frecuentemente se denota de la siguiente manera:

$$
|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}
$$

Aplicando esta definición a expresiones de la forma $ax+b$ se tiene:

$$
|ax+b| = \begin{cases} ax+b & \text{si} \quad ax+b \geq 0 \\ -(ax+b) & \text{si} \quad ax+b < 0 \end{cases}
$$

Usando la definición de valor absoluto se tiene:

Ejemplo 1

$$
|x+5| = \begin{cases} x+5 & \text{si} \quad x+5 \geq 0 \\ \\ -(x+5) & \text{si} \quad x+5 < 0 \end{cases}
$$

pero: $x+5 \geq 0 \iff x \geq -5$

y $x+5 < 0 \iff x < -5$

$$\therefore \; |x+5| = \begin{cases} x+5 & \text{si} \quad x \geq -5 \\ -(x+5) & \text{si} \quad x < -5 \end{cases}$$

Para efectos de lograr mayor claridad podemos resumir esta información en la tabla siguiente:

	$-\infty$	-5	$+\infty$
$\lvert x+5\rvert$	$-(x+5)$	$x+5$	

■ Ejemplo 2

$$|x-7| = \begin{cases} x-7 & \text{si} \quad x-7 \geq 0 \\ -(x-7) & \text{si} \quad x-7 < 0 \end{cases}$$

pero: $x-7 \geq 0 \iff x \geq 7$

y $x-7 < 0 \iff x < 7$

$$\therefore \; |x-7| = \begin{cases} x-7 & \text{si} \quad x \geq 7 \\ -(x-7) & \text{si} \quad x < 7 \end{cases}$$

y en forma resumida podemos escribir:

	$-\infty$	7	$+\infty$
$\lvert x-7\rvert$	$-(x-7)$	$x-7$	

■ Ejemplo 3

$$|-2x+3| = \begin{cases} -2x+3 & \text{si} \quad -2x+3 \geq 0 \\ -(-2x+3) & \text{si} \quad -2x+3 < 0 \end{cases}$$

pero: $-2x+3 \geq 0 \iff -2x \geq -3,$ o sea $x \leq \dfrac{3}{2}$

y $-2x+3 < 0 \iff -2x < -3,$ o sea $x > \dfrac{3}{2}$

$$\therefore \; |-2x+3| = \begin{cases} -2x+3 & \text{si} \quad x \geq \dfrac{3}{2} \\ -(-2x+3) & \text{si} \quad x < \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

y en forma resumida podemos escribir:

	$-\infty$	$3/2$	$+\infty$
$\lvert -2x+3\rvert$	$-2x+3$	$-(-2x+3)$	

Ejemplo 4

$$|-3-5x| = \begin{cases} -3-5x & \text{si} \quad -3-5x \geq 0 \\ -(-3-5x) & \text{si} \quad -3-5x < 0 \end{cases}$$

pero: $\quad -3-5x \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -5x \geq 3, \quad$ o sea $\quad x \leq \dfrac{-3}{5}$

y $\quad -3-5x < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -5x < 3, \quad$ o sea $\quad x > \dfrac{-3}{5}$

$$\therefore \quad |-3-5x| = \begin{cases} -3-5x & \text{si} \quad x \leq \dfrac{-3}{5} \\ -(-3-5x) & \text{si} \quad x > \dfrac{-3}{5} \end{cases}$$

y en forma resumida podemos escribir:

	$-\infty$	$-3/5$	$+\infty$
$\lvert -3-5x\rvert$	$-3-5x$	$-(-3-5x)$	

5.1.1 Propiedades del valor absoluto

Enunciaremos a continuación algunas propiedades del valor absoluto, las cuales podrán ser utilizadas para facilitar el trabajo en la resolución de ecuaciones o inecuaciones que incluyen valor absoluto.

Propiedad 1

$\forall x,\ x \in \mathbb{R}: \ |x| \geq 0$

Demostración

$$x \in \mathbb{R}: \ |x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Hay dos posibles casos:

Caso 1: $x \geq 0$

$x \geq 0 \implies |x| = x$

$\therefore \ |x| \geq 0$

Caso 2: $x < 0$

$x < 0 \implies |x| = -x$

$\therefore \ |x| \geq 0;$ pues $x < 0 \Longrightarrow -x > 0$

Propiedad 2

Si $x \in \mathbb{R}$ y $|x| = 0$ entonces $x = 0$

Demostración: (ejercicio para el estudiante)

Propiedad 3

Si $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ entonces $|x \cdot y| = |x|\,|y|$

Demostración

Para demostrar esta propiedad conviene recordar que:

$\forall a, a \in \mathbb{R} : |a| = \sqrt[n]{a^n}$, si n es par (ver página 94)

en particular:

$|a| = \sqrt{a^2}\,; \forall a,\ a \in \mathbb{R}$

Usando esta definición se tiene que:

$|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2y^2} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y^2} = |x| \cdot |y|$

$\therefore = |x| \cdot |y|$

Propiedad 4

$\forall x,\ x \in \mathbb{R} :\ |-x| = |x|$

Demostración:(ejercicio para el estudiante)

Propiedad 5

Si $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$ entonces $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$

Demostración

Aquí también usaremos el hecho que:

$\forall a, a \in \mathbb{R} : |a| = \sqrt{a^2}$

Si $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$ entonces $\dfrac{x}{y} \in \mathbb{R}$

$$\therefore \left|\frac{x}{y}\right| = \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{y^2}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{y^2}} = \frac{|x|}{|y|}$$

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

Propiedad 6

$\forall x,\ x \in \mathbb{R}:\ |x|^2 = x^2$

Demostración

$\forall x,\ x \in \mathbb{R}:$, se tiene que:

$|x| = \sqrt{x^2}$

$\Rightarrow |x|^2 = (\sqrt{x^2})^2$

$\Rightarrow |x|^2 = x^2$ pues $\forall a,\ a \in \mathbb{R}\ (\sqrt{a} \in \mathbb{R} \Longrightarrow (\sqrt{a})^2 = a)$

$\therefore\ \forall x,\ x \in \mathbb{R}:\ |x|^2 = x^2$

Propiedad 7

Sea x una variable real y k un número real positivo entonces:

$|x| = k \iff x = k$ ó $x = -k$

Demostración:

Como $|x| = \sqrt{x^2}$, se tiene:

$$\begin{array}{lll}
 & |x| & = & k \\
\iff & \sqrt{x^2} & = & k \\
\iff & (\sqrt{x^2})^2 & = & k^2 \\
\iff & x^2 & = & k^2 \\
\iff & x^2 - k^2 & = & 0 \\
\iff & (x-k)(x+k) & = & 0
\end{array}$$

$\iff x = k$ o $x = -k$

$\therefore\ |x| = k \iff x = k$ o $x = -k$

$\overline{x^2}$, se tiene:

$$
\begin{array}{rlcl}
 & |x| & < & k \\
\Longleftrightarrow & \sqrt{x^2} & < & k \\
\Longleftrightarrow & (\sqrt{x^2})^2 & < & k^2 \\
\Longleftrightarrow & x^2 & < & k^2 \\
\Longleftrightarrow & x^2 - k^2 & < & 0 \\
\Longleftrightarrow & (x-k)(x+k) & < & 0
\end{array}
$$

Resolviendo esta inecuación:

$-\infty \quad -k \quad k \quad +\infty$

$x-k$	$-$	$-$	$+$
$x+k$	$-$	$+$	$+$
$(x-k)(x+k)$	$+$	$-$	$+$

De aquí se tiene:

$(x-k)(x+k) < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in]-k, k[$

o sea: $-k < x < k$

$\therefore \ |x| < k \iff -k < x < k$

Propiedad 9

Sea x una variable real y k un número real positivo entonces:

$|x| > k \iff x > k \quad \text{o} \quad x < -k$

Demostración:

Esta propiedad se demuestra en forma similar a la propiedad 9, ya demostrada, dejaremos esta demostración como ejercicio para el estudiante.

Propiedad 10

Sea x una variable real y k un número real positivo entonces:

i.) $|x| \leq k \Longleftrightarrow -k \leq x \leq k$

ii.) $|x| \geq k \Longleftrightarrow x \geq k \quad \text{o} \quad x \leq k$

Demostración:

El procedimiento usado para demostrar esta propiedad es similar al usado para demostrar la propiedad 8. Dejaremos esta demostración como ejercicio para el estudiante.

Propiedad 11

$\forall x,\ x \in \mathbb{R}:\ -|x| \leq x \leq |x|$

Demostración:

Sabemos que $\forall x,\ x \in \mathbb{R}:\ |x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

Caso 1: $x \geq 0$

$x \geq 0 \implies x = |x|$

$\therefore\ x \leq |x|$ (*)

Además como $|x| \geq 0$ entonces $-|x| \leq 0$ y como $x \geq 0$ entonces: $-|x| \leq x$ $(**)$

Así por $(*)$ y $(**)$ se tiene que:

$-|x| \leq x$ y $x \leq |x|$

$\therefore\ -|x| \leq x \leq |x|\ (I)$

Caso 2: $x < 0$

$$\begin{array}{rcrcl} x < 0 & \implies & |x| & = & -x \\ & \implies & -|x| & = & x \\ & \therefore & -|x| & \leq & x \quad (***) \end{array}$$

Además como $x < 0$ y $|x| \geq 0$ entonces

$x \leq |x| \quad (****)$

Así por $(***)$ y $(****)$ se tiene que:

$-|x| \leq x$ y $x \leq |x|$

$\therefore\ -|x| \leq x \leq |x|\ (II)$

Por lo tanto de (I) y (II) se concluye que:

$\forall x,\ x\ \in \mathbb{R}:\ -|x| \leq x \leq |x|$

Propiedad 12 *(desigualdad triangular)*

Si $x\ \in \mathbb{R},\ \ y \in \mathbb{R}$ entonces $|x+y| \leq |x| + |y|$

Demostración:

Antes de demostrar esta propiedad, es necesario conocer el siguiente lema:

Lema:

Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$

Si $a \leq b$ y $c \leq d$ entonces $a + c \leq b + d$

Demostración (del lema)

Supongamos que $a \leq b$ y $c \leq d$, hay que demostrar que $a + c \leq b + d$

i.) $a \leq b \implies a + c \leq b + c$

ii.) $c \leq d \implies b + c \leq b + d$

por *i.)* y *ii.)* se tiene que $a + c \leq b + d$

Nota: El lema anterior expresa que si se tienen desigualdades $a \leq b$ y $c \leq d$ podemos sumar miembro a miembro estas desigualdades de la manera siguiente:

$$\begin{array}{ccc} a & \leq & b \\ c & \leq & d \\ \hline a+c & \leq & b+d \end{array}$$

Estamos ahora en condiciones de demostrar la desigualdad triangular.

Demostración de la Propiedad 12 (desigualdad triangular).

$\forall x,\ x\ \in \mathbb{R},\ \forall y,\ y\ \in \mathbb{R}$, se tiene que:

$-|x| \leq\ x\ \leq |x|$ y

$-|y| \leq\ y\ \leq |y|$

Sumando miembro a miembro estas desigualdades se tiene:

$-|x| + -|y|\ \leq\ x + y\ \leq\ |x| + |y|$

$\therefore\ \ -(|x| + |y|)\ \leq\ x + y\ \leq\ |x| + |y|$

$\therefore\ \ |x+y|\ \leq\ |x| + |y|$ por la propiedad $(10.i)$

5.1.2 Ecuaciones que involucran valor absoluto

A continuación resolveremos algunas ecuaciones que involucran valor absoluto, para esto utilizaremos, siempre que sea posible, algunas propiedades enunciadas anteriormente y en los que no sea posible aplicar alguna de dichas propiedades, resolveremos las ecuaciones correspondientes usando la definición de valor absoluto. Además es importante tener en cuenta que toda ecuación que involucre valor absoluto se puede resolver usando la definición.

Ejercicios 1

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones

1.) $|2x-3| = 7$

2.) $|x| = 5$

3.) $|x-3| = -3$

4.) $|x+8| = 0$

5.) $|2x+3| = -9$

6.) $|x+3| = 5+x$

7.) $|1-3x| + x = -3$

8.) $3|x+4| - 2 = x$

9.) $\sqrt[4]{(2x-15)^4} = 10$

10.) $\sqrt{(3-2x)^2} + x = 3$

11.) $2\sqrt[4]{(5-4x)^4} = x+2$

Solución

1.) $|2x-3| = 7$

Por la propiedad 7

$$|2x-3| = 7$$

$$\begin{array}{lrclcrcl}
\Longleftrightarrow & 2x-3 & = & 7 & \text{o} & 2x-3 & = & -7 \\
\Longleftrightarrow & 2x & = & 10 & \text{o} & 2x & = & -4 \\
\Longleftrightarrow & x & = & 5 & \text{o} & x & = & -2
\end{array}$$

$\therefore\ S = \{-2, 5\}$

Observación: Como dijimos anteriormente, todas las ecuaciones que involucran valor absoluto se pueden resolver usando la definición. Para ilustrar esto resolveremos la ecuación anterior usando la definición de valor absoluto.

$\overline{2}$

y $\quad 2x - 3 < 0 \iff 2x < 3;$ o sea $x < \dfrac{3}{2}$

$$\therefore \quad |2x-3| = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si} \quad x \geq \dfrac{3}{2} \\ -(2x-3) & \text{si} \quad x < \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Con esta información construimos la tabla siguiente:

	$-\infty$ $\quad$ $3/2$	$+\infty$
$\lvert 2x-3\rvert$	$-(2x-3)$	$2x-3$
$\lvert 2x-3\rvert = 7$	$-(2x-3) = 7$ $-2x + 3 = 7$ $-2x = 4$ $x = -2$ como $-2 \in \left]-\infty, \dfrac{3}{2}\right[$ $\therefore\ S_1 = \{-2\}$	$2x - 3 = 7$ $2x = 10$ $x = 5$ como $5 \in \left]\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$ $\therefore\ S_2 = \{5\}$

Así el conjunto solución es $S = S_1 \cup S_2$ o sea $S = \{-2,5\}$

2.) $|x| = 5$

Por la propiedad 7:

$|x| = 5 \iff x = 5$ o $x = -5$

$\therefore \quad S = \{-5, 5\}$

3.) $|x-3| = -3$

Por la propiedad 1, $|x-3| \geq 0, \forall x, x \in \mathbb{R}$, por lo tanto:

$|x-3| = -3$!Nunca!

$\therefore \quad S = \emptyset$

4.) $|x+8| = 0$

Por la propiedad 2,

$$\begin{aligned} |x+8| = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x+8 &= \quad 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x &= \quad -8 \end{aligned}$$

$\therefore \quad S = \{-8\}$

5.) $|2x+3| = -9$

Por la propiedad 1, $|2x+3| \geq 0, \forall x, x \in \mathbb{R}$

$\therefore \quad |2x+3| = -9 \quad$ ¡Nunca!

$\therefore \quad S = \emptyset$

6.) $|x+3| = 5+x$

Nota: En este caso no es posible aplicar alguna de las propiedades anteriores, por lo que procedemos de la siguiente manera:

$$|x+3| = \begin{cases} x+3 & \text{si} \quad x+3 \geq 0 \\ -(x+3) & \text{si} \quad x+3 < 0 \end{cases}$$

o sea:

$$|x+3| = \begin{cases} x+3 & \text{si} \quad x \geq -3 \\ -(x+3) & \text{si} \quad x < -3 \end{cases}$$

Con esta información construimos la siguiente tabla:

$-\infty \qquad\qquad -3 \qquad\qquad +\infty$

$\lvert x+3\rvert$	$-(x+3)$	$x+3$
$\lvert x+3\rvert = 5+x$	$-(x+3) = 5+x$ Resolviendo esta ecuación: $-x-3 = 5+x$ $-x-x = 5+3$ $-2x = 8$ $x = -4$ como $-4 \in \left]-\infty, -3\right[$ $\therefore\ S_1 = \{-4\}$	$x+3 = 5+x$ Resolviendo esta ecuación: $x+3 = 5+x$ $x-x = 5-3$ $0 = 2$ $\therefore\ S_2 = \emptyset$

Así el conjunto solución S de $|x+3| = 5+x$ es $S_1 \cup S_2$, o sea $S = \{-4\}$

7.) $|1-3x| + x = -3$

En este caso debemos proceder como en el ejemplo anterior:

$$|1-3x| = \begin{cases} 1-3x & \text{si} \quad 1-3x \geq 0 \\ -(1-3x) & \text{si} \quad 1-3x < 0 \end{cases}$$

pero: $\quad 1-3x \geq 0 \iff -3x \geq -1, \quad$ o sea $\quad x \leq \dfrac{1}{3}$

y $\quad 1-3x < 0 \iff -3x < -1, \quad$ o sea $\quad x > \dfrac{1}{3}$

$$|1-3x| = \begin{cases} 1-3x & \text{si} \quad x \leq \dfrac{1}{3} \\ -(1-3x) & \text{si} \quad x > \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Con esta información construiremos la siguiente tabla:

	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$\lvert 1-3x\rvert$	$1-3x$		$-(1-3x)$
$\lvert 1-3x\rvert + x = -3$	$1-3x+x=-3$ $-2x=-4$ $x=2$ Como $2 \notin \left]-\infty, \frac{1}{3}\right]$ $\therefore\; S_1 = \emptyset$		$-(1-3x)+x=-3$ $-1+3x+x=-3$ $4x=-2$ $x=\frac{-1}{2}$ como $\frac{-1}{2} \notin \left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$ entonces: $\therefore\; S_2 = \emptyset$

Así el conjunto solución S de $|1-3x|+x=-3$ es $S_1 \cup S_2$ o sea $S=\emptyset$

8.) $3|x+4|-2=x$

En este caso:

$$|x+4| = \begin{cases} x+4 & \text{si} \quad x+4 \geq 0 \\ -(x+4) & \text{si} \quad x+4<0 \end{cases}$$

o sea:

$$|x+4| = \begin{cases} x+4 & \text{si} \quad x \geq -4 \\ -(x+4) & \text{si} \quad x<-4 \end{cases}$$

Con esta información construimos la siguiente tabla:

$-\infty$ $\qquad\qquad$ -4 $\qquad\qquad$ $+\infty$

$\|x+4\|$	$-(x+4)$	$x+4$
$3\|x+4\|-2=x$	$3[-(x+4)]-2=x$	$3(x+4)-2=x$
	$3[-x-4]-2=x$	$3x+12-2=x$
	$-3x-12-2=x$	$3x-x+10=0$
	$-3x-14-x=0$	$2x=-10$
	$-4x=14$	$x=-5$
	$x=\dfrac{-14}{4}$	Como $-5 \notin [-4,+\infty[$
	$x=\dfrac{-7}{2}$	entonces: $S_2=\emptyset$
	Como $-7/2 \notin]-\infty,-4]$	
	entonces: $S_1=\emptyset$	

De aquí se tiene que el conjunto solución S de $3|x-4|-2=x$ es vacío o sea $S=\emptyset$

9.) $\sqrt[4]{(2x-15)^4}=10$

$$\begin{array}{llll} \sqrt[4]{(2x-15)^4}=10 & \iff & & \\ |2x-15|=10 & \iff & 2x-15=10 & \text{o} \quad 2x-15=-10 \\ & \iff & 2x=25 & \text{o} \quad 2x=5 \\ & \iff & x=\dfrac{25}{2} & \text{o} \quad x=\dfrac{5}{2} \end{array}$$

$\therefore \quad S=\left\{\dfrac{25}{2},\dfrac{5}{2}\right\}$

10.) $\sqrt{(3-x)^2}=5$

$$\begin{array}{llll} \sqrt{(3-x)^2}=5 & \iff & & \\ |3-x|=5 & \iff & 3-x=5 & \text{o} \quad 3-x=-5 \\ & \iff & -x=2 & \text{o} \quad -x=-8 \\ & \iff & x=-2 & \text{o} \quad x=8 \end{array}$$

$\therefore \quad S=\{-2,8\}$

11.) $\sqrt{(3-2x)^2}+x=3$

$$\begin{aligned}\sqrt{(3-2x)^2}+x &= 3 \iff\\ |3-2x|+x &= 3\end{aligned}$$

Pero:

$$|3-2x| = \begin{cases} 3-2x & \text{si} \quad 3-2x \geq 0 \\ -(3-2x) & \text{si} \quad 3-2x < 0 \end{cases}$$

Como: $3-2x \geq 0 \iff -2x \geq -3,$ o sea $x \leq \dfrac{3}{2}$

y $3-2x < 0 \iff -2x < -3,$ o sea $x > \dfrac{3}{2}$

$$\therefore \quad |3-2x| = \begin{cases} 3-2x & \text{si} \quad x \leq \dfrac{3}{2} \\ -(3-2x) & \text{si} \quad x > \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Con esta información construimos la siguiente tabla:

	$-\infty$ $3/2$	$+\infty$
$\lvert 3-2x\rvert$	$3-2x$	$-(3-2x)$
$\lvert 3-2x\rvert+x=3$	$3-2x+x=3$ $-x=3-3$ $-x=0$ $x=0$ como $0 \in \left]-\infty, \dfrac{3}{2}\right[$ $\therefore \quad S_1=\{0\}$	$-(3-2x)+x=3$ $-3+2x+x=3$ $3x=6$ $x=2$ como $2 \in \left]\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$ $\therefore \quad S_2=\{2\}$

De aquí se tiene que el conjunto solución S de $\sqrt{(3-2x)^2}+x=3$ es $\{0,2\}$ o sea; $S=\{0,2\}$

12.) $2\sqrt[4]{(5-4x)^4}=x+2$

$2|5-4x| = x+2$

Pero: $|5-4x| = \begin{cases} 5-4x & \text{si} \quad 5-4x \geq 0 \\ -(5-4x) & \text{si} \quad 5-4x < 0 \end{cases}$

Como: $5-4x \geq 0 \iff -4x \geq -5$, o sea $x \leq \dfrac{5}{4}$

y $5-4x < 0 \iff -4x < -5$, o sea $x > \dfrac{5}{4}$

$\therefore \quad |5-4x| = \begin{cases} 5-4x & \text{si} \quad x \leq \dfrac{5}{4} \\ -(5-4x) & \text{si} \quad x > \dfrac{5}{4} \end{cases}$

Con esta información construimos la siguiente tabla:

	$-\infty$ $5/4$	$+\infty$
$\lvert 5-4x\rvert$	$5-4x$	$-(5-4x)$
$2\lvert 5-4x\rvert = x+2$	$2(5-4x) = x+2$	$2[-(5-4x)] = x+2$
	$10-8x = x+2$	$2[-5+4x] = x+2$
	$-8x-x = 2-10$	$-10+8x = x+2$
	$-9x = -8$	$8x-x = 2+10$
	$x = \dfrac{8}{9}$	$7x = 12$
		$x = \dfrac{12}{7}$
	como $\dfrac{8}{9} \in \left]-\infty, \dfrac{5}{4}\right[$	como $\dfrac{12}{7} \in \left]\dfrac{5}{4}, +\infty\right[$
	$\therefore \quad S_1 = \left\{\dfrac{8}{9}\right\}$	$\therefore \quad S_2 = \left\{\dfrac{12}{7}\right\}$

De aquí se tiene que el conjunto solución S de $2\sqrt[4]{(5-4x)^4} = x+3$ es $\left\{\dfrac{8}{9}, \dfrac{12}{7}\right\}$, o sea $S = \left\{\dfrac{8}{9}, \dfrac{12}{7}\right\}$

Ejercicios 2

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

1.) $|x| = 7$

2.) $|2x+5| = -8$

3.) $|-2x+9| = 11$

4.) $-3|3-2x| = -12$

5.) $|3x+2| = x+1$

6.) $2|2x-5| = x-3$

7.) $3|-5x-1| = -2x+3$

8.) $-1-2|5-3x| = x$

9.) $\sqrt[6]{(2x+1)^6} = 3$

10.) $-2\sqrt{(1-7x)^2} = -6$

11.) $\sqrt{(x-2)^2} + 3x = 6$

12.) $x + 2\sqrt[4]{(x-6)^4} = 5$

13.) $2|x| + |x-1| = 4$

14.) $|2x-3| - 2|x| = 3$

15.) $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| = 2$

16.) $2|3x-1| = \sqrt{(x-7)^2}$

17.) $2|2-x| + |2x-1| = x$

18.) $|3-2x| - 3|x+2| - x = 0$

Nota: En las ecuaciones, que resolveremos a continuación, omitiremos algunos pasos al escribir la definición de cada uno de los valores absolutos involucrados.

Solución

1.) $2|x| + |x-1| = 4$

En este caso se tiene que:

a.) $|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

b.) $|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$

Con esta información construimos la siguiente tabla:

$-\infty$ $\qquad$ 0 $\qquad$ 1 $\qquad$ $+\infty$

$\|x\|$	$-x$	x	x
$\|x-1\|$	$-(x-1)$	$-(x-1)$	$x-1$
$2\|x\|+\|x-1\|=4$	$2x+-(x-1)=4$ $-2x-x+1=4$ $-3x=3$ $x=-1$ como $-1\in]-\infty,0[$ $\therefore \quad S_1=\{-1\}$	$2x+-(x-1)=4$ $2x-x+1=4$ $x=3$ $x=\dfrac{5}{3}$ Como $3\notin]0,1[$ $\therefore \quad S_2=\emptyset$	$2(-x)+(x-1)=4$ $2x+x-1=4$ $3x=5$ como $\dfrac{5}{3}\in \left]\dfrac{5}{3},+\infty\right[$ $\therefore \quad S_2=\Big\{\dfrac{5}{}$

De aquí se tiene que el conjunto solución de $2|x|+|x-1|=4$ es S donde $S=S_1\cup S_2\cup S_3$

$\therefore \quad S=\left\{-1,\dfrac{5}{3}\right\}$

2.) $|2x-3|-2|x|=3$

En este caso se tiene que:

a.) $|2x-3|=\begin{cases} 2x-3 & \text{si} \quad x\geq \dfrac{3}{2} \\ -(2x-3) & \text{si} \quad x<\dfrac{3}{2}\end{cases}$

b.) $|x|=\begin{cases} x & \text{si} \quad x\geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x<0\end{cases}$

Con esta información construimos la siguiente tabla:

$-\infty$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $3/2$ $\qquad$ $+\infty$

$\|2x-3\|$	$-(2x-3)$	$-(2x-3)$	$2x-3$
$\|x\|$	$-x$	x	x
$\|2x-3\|-2\|x\|=3$	$-(2x-3)-2(-x)=3$ $-2x+3+2x=3$ $3=3$ $\therefore \quad S_1=]-\infty,0[$	$-(2x-3)-2(x)=3$ $-2x+3-2x=3$ $-4x=0$ $x=0$ como $0\in \left]0,\frac{3}{2}\right[$ $\therefore \quad S_2=\{0\}$	$2x-3-2x=3$ $-3=3$ $\therefore \quad S_3=\emptyset$

De aquí que el conjunto solución de $|2x-3|-2|x|=3$ es $S=S_1\cup S_2\cup S_3$

$\therefore \quad S=]-\infty,0]$

3.) $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|=2$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x-1}{x+1}\right|=2 \iff\ & \frac{|x-1|}{|x+1|} &=&\ 2, && \text{por la propiedad 5}\\
\iff\ & |x-1| &=&\ 2|x+1| && (*),\ \text{con } x\neq -1\\
\iff\ & |x-1|^2 &=&\ (2|x+1|)^2 &&\\
\iff\ & |x-1|^2 &=&\ 4|x+1|^2 &&\\
\iff\ & (x-1)^2 &=&\ 4(x+1)^2, && \text{por la propiedad 6}\\
\iff\ & x^2-2x+1 &=&\ 4(x^2+2x+1) &&\\
\iff\ & x^2-2x+1 &=&\ 4x^2+8x+4 &&\\
\iff\ & -3x^2-10x-3 &=&\ 0 &&\\
\iff\ & 3x^2+10x+3 &=&\ 0 &&
\end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación por fórmula general:

$$\begin{array}{rcl}\triangle & = & 100 - 4(3)(3)\\ \triangle & = & 100 - 36\\ \triangle & = & 64\\ x_1 & = & \dfrac{-10+8}{6} \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = \dfrac{-1}{3}\\ x_2 & = & \dfrac{-10-8}{6} \qquad \Longrightarrow \qquad x_2 = -3\end{array}$$

De aquí se tiene que el conjunto solución de $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| = 2$ es S, donde

$S = \left\{-3, \dfrac{-1}{3}\right\}$

Nota: A partir de $(*)$ esta ecuación se puede resolver utilizando un procedimiento similar al usado en los ejemplos (1) y (2) anteriores.

4.) $2|3x-1| = \sqrt{(x-7)^2}$

$$\begin{array}{rrcll}\Longleftrightarrow & 2|3x-1| & = & |x-7| & (*)\text{(Ver nota anterior)}\\ \Longleftrightarrow & (2|3x-1|)^2 & = & |x-7|^2 & \\ \Longleftrightarrow & 4|3x-1|^2 & = & |x-7|^2 & \\ \Longleftrightarrow & 4(3x-1)^2 & = & (x-7)^2 & \\ \Longleftrightarrow & 4(9x^2-6x+1) & = & x^2-14x+49 & \\ \Longleftrightarrow & 36x^2-24x+4 & = & x^2-14x+49 & \\ \Longleftrightarrow & 35x^2-10x-45 & = & 0 & \\ \Longleftrightarrow & 7x^2-2x-9 & = & 0 & \end{array}$$

Resolviendo esta ecuación por fórmula general:

$$\begin{array}{rcl}\triangle & = & 4 - 4(7)(-9)\\ \triangle & = & 4 + 252\\ \triangle & = & 256\\ x_1 & = & \dfrac{2+16}{14} \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = \dfrac{9}{7}\\ x_2 & = & \dfrac{2-16}{14} \qquad \Longrightarrow \qquad x_2 = -1\end{array}$$

De aqui se tiene que el conjunto solución de $2|3x-1| = \sqrt{(x-7)^2}$ es S donde: $S = \left\{\dfrac{9}{7}, -1\right\}$

5.) $2|2-x| + |2x-1| = x$

En este caso se tiene que:

a.) $|2-x| = \begin{cases} 2-x & \text{si} \quad x \leq 2 \\ -(2-x) & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

b.) $|2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & \text{si} \quad x \geq \dfrac{1}{2} \\ -(2x-1) & \text{si} \quad x < \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Con esta información construimos la siguiente tabla:

$-\infty$ $\qquad 1/2 \qquad 2 \qquad +\infty$

$\|2-x\|$	$2-x$	$2-x$	$-(2-x)$
$\|2x-1\|$	$-(2x-1)$	$2x-1$	$2x-1$
$2\|2-x\| + \|2x-1\| = x$	$2(2-x) + -(2x-1) = x$ $4-2x-2x+1 = x$ $-2x-2x-x = -4-1$ $-5x = -5$ $x = 1$ Como $1 \notin \left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[$ entonces: $S_1 = \emptyset$	$2(2-x) + (2x-1) = x$ $4-2x+2x-1 = x$ $3 = x$ Como $3 \notin \left[\dfrac{-1}{2}, 2\right]$ entonces: $S_2 = \emptyset$	$2[-(2-x)] + (2x-1) = x$ $2[-2+x] + 2x - 1 = x$ $-4+2x+2x-1 = x$ $2x+2x-x = 4+1$ $3x = 5$ $x = \dfrac{5}{3}$ Como $\dfrac{5}{3} \notin]2, +\infty[$ $S_3 = \emptyset$

De aquí que el conjunto solución de $2|2-x| + |2x-1| = x$ es S, donde $S = \emptyset$

6.) $|3-2x|-3|x+2|-x=0$

En este caso se tiene que:

a.) $|3-2x| = \begin{cases} 3-2x & \text{si} \quad x \leq \dfrac{3}{2} \\ -(3-2x) & \text{si} \quad x > \dfrac{3}{2} \end{cases}$

b.) $|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x \geq -2 \\ -(x+2) & \text{si} \quad x < -2 \end{cases}$

Con esta información construimos la siguiente tabla:

	$-\infty$ -2	-2 $3/2$	$3/2$ $+\infty$
	$3-2x$	$3-2x$	$-(3-2x)$
$\|x+2\|$	$-(x+2)$	$x+2$	$x+2$
$\|3-2x\|-3\|x+2\|-x=0$	$3-2x-3[-(x+2)]-x=0$ $3-2x-3[-x-2]-x=0$ $3-2x+3x+6-x=0$ $9=0$ $\therefore \quad S_1=\emptyset$	$3-2x-3(x+2)-x=0$ $3-2x-3x-6-x=0$ $-6x-3=0$ $-6x=3$ $x=\dfrac{-1}{2}$ como $\dfrac{-1}{2} \in \left]-2, \dfrac{3}{2}\right[$ $\therefore \quad S_2=\left\{\dfrac{-1}{2}\right\}$	$-(3-2x)-3(x+2)-x=0$ $-3+2x-3x-6-x=0$ $-2x-9=0$ $-2x=9$ $x=\dfrac{-9}{2}$ Como: $\dfrac{-9}{2} \notin \left]\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$ $\therefore \quad S_3=\emptyset$

De aquí que el conjunto solución de $|3-2x|-3|x+2|-x=0$ es S, donde $\quad S=\left\{\dfrac{-1}{2}\right\}$

Ejercicios 3

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

1.) $\sqrt{(4x-1)^2} = |3-8x|$

2.) $\left|\dfrac{2x+1}{1-x}\right| = 3$

3.) $|x+3|-|x-2| = x$

4.) $\sqrt[4]{(x+1)^4} - 3|x-2| = 6$

5.) $|x-4| - \left|\dfrac{x-1}{5}\right| = 4 - x$

6.) $\dfrac{|x|}{2} + 3x + 4 = |x-1|$

5.1.3 Inecuaciones que involucran valor absoluto

Resolveremos inecuaciones que involucran valor absoluto de expresiones de la forma $ax+b$, donde a y b son constantes con $a \neq 0$ y x es una variable real. Para esto utilizaremos la definición de valor absoluto, y en los casos en donde sea posible usar alguna de las propiedades estudiadas, las aplicaremos, con el fin de facilitar el procedimiento de resolución.

Ejercicios 4

Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones:

1.) $|x-2| < 1$

2.) $|5x-7| \leq 3$

3.) $|3-x| < 4$

4.) $|5-2x| \leq 7$

5.) $|2x-3| \leq -5$

6.) $|7-2x| \geq -6$

7.) $|5x+2| > 0$

8.) $2|3-x| - 10 \geq 0$

9.) $|x-3| \leq 2x-5$

10.) $|x| + 3 \geq 2x$

11.) $\sqrt[6]{(2x+1)^6} > 3$

12.) $\sqrt{\left(\dfrac{2}{5}x+1\right)^2} - x < 2$

Solución

1.) $|x-2| < 1$

Sabemos que:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si} \quad x \geq 2 \\ -(x-2) & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}$$

Con esta información construimos la siguiente tabla:

	$-\infty$	2 $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$\|x-2\|$	$-(x-2)$	$x-2$
$\|x-2\|<1$	$-(x-2)<1$ $-x+2<1$ $-x<-1$ $x>1$ Así debe cumplirse que $x<2$ y $x>1$ $\therefore \quad S_1 =]1,2[$	$x-2<1$ $x<3$ Así debe cumplirse que $x \geq 2$ y $x<3$ $\therefore \quad S_2 = \ [2,3[$

En consecuencia el conjunto solución S, de $|x-2|<1$ es $S_1 \cup S_2$ o sea $S =]1,3[$

Nota: La inecuación $|x-2|<1$ y otras similares, se pueden resolver aplicando propiedades del valor absoluto y además algunos resultados que se enuncian a continuación y que aceptaremos sin demostrar.

Resultado 1

$\forall a, a \in \mathbb{R}, \forall b, b \in \mathbb{R}, \forall c, c \in \mathbb{R}, \forall k, k \in \mathbb{R}$

$i.)\ a \ < \ b \ < \ c \iff a+k \ < \ b+k \ < \ c+k$

$ii.)\ a \ \leq \ b \ \leq \ c \iff a+k \ \leq \ b+k \ \leq \ c+k$

Resultado 2

$\forall a, a \in \mathbb{R}, \forall b, b \in \mathbb{R}, \forall c, c \in \mathbb{R}, \forall k, k \in \mathbb{R}$ con $k>0$

$i.)\ a \ < \ b \ < \ c \iff ak \ < \ bk \ < \ ck$

$ii.)\ a \ \leq \ b \ \leq \ c \iff ak \ \leq \ bk \ \leq \ ck$

Resultado 3

$\forall a, a \in \mathbb{R}, \forall b, b \in \mathbb{R}, \forall c, c \in \mathbb{R}, \forall k, k \in \mathbb{R}$ con $k<0$

$i.)\ a \ < \ b \ < \ c \iff ak \ > \ bk \ > \ ck$

$ii.)\ a \leq b \leq c \iff ak \ \geq \ bk \ \geq \ ck$

Usando estos resultados y las propiedades correspondientes del valor absoluto, $|x-2|<1$ se resuelve así.

$$
\begin{aligned}
|x-2|<1 \quad &\Longleftrightarrow \quad -1 \ < \ x-2 \ < \ 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad -1+2 \ < \ x-2+2 \ < \ 1+2 \\
&\Longleftrightarrow \quad 1 \ < \ x \ < \ 3
\end{aligned}
$$

$\therefore \quad S =]1,3[$

2.) $|5x-7| \leq 3$

$$
\begin{aligned}
|5x-7| \leq 3 \quad &\Longleftrightarrow \quad -3 \ \leq \ 5x-7 \ \leq \ 3 \\
&\Longleftrightarrow \quad -3+7 \ \leq \ 5x-7+7 \ \leq \ 3+7 \\
&\Longleftrightarrow \quad 4 \ \leq \ 5x \ \leq \ 10 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{5}\cdot 4 \ \leq \ \frac{1}{5}\cdot 5x \ \leq \ \frac{1}{5}\cdot 10 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{4}{5} \ \leq \ x \ \leq \ 2
\end{aligned}
$$

$\therefore \quad S = \left[\frac{4}{}\right.$

$$
\begin{aligned}
|5-2x| \leq 7 \quad &\Longleftrightarrow \quad -7 \;\leq\; 5-2x \;\leq\; 7 \\
&\Longleftrightarrow \quad -7-5 \;\leq\; -5+5-2x \;\leq\; -5+7 \\
&\Longleftrightarrow \quad -12 \;\leq\; -2x \;\leq\; 2 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{-1}{2}\cdot(-12) \;\geq\; \frac{-1}{} \qquad\qquad\qquad \frac{}{2}\cdot 2 \\
&\Longleftrightarrow \quad 6 \;\geq\; x \;\geq\; -1 \\
&\Longleftrightarrow \quad -1 \;\leq\; x \;\leq\; 6
\end{aligned}
$$

$\therefore \quad S = [-1, 6]$

5.) $|2x-3| < -5$

por propiedad 1:

$|2x-3| \geq 0, \;\; \forall x, x \in \mathbb{R}$

$\therefore \quad |2x-3| \geq -5;$ ¡Nunca!

$\therefore \quad S = \varnothing$

6.) $|7-2x| \geq -6$

por propiedad 1;

$|7-2x| \geq 0, \;\; \forall x, x \in \mathbb{R}$

en particular

$|7-2x| \geq -6, \;\; \forall x, x \in \mathbb{R}$

$\therefore \quad S = \mathbb{R}$

7.) $|5x+2| > 0$

por propiedad 1;

$|5x+2| \geq 0, \;\; \forall x, x \in \mathbb{R}$

por propiedad 2;

$$
\begin{aligned}
|5x+2| = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 5x+2 \;=\; 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad 5x \;=\; -2 \\
&\Longleftrightarrow \quad x \;=\; \frac{-2}{5}
\end{aligned}
$$

$\therefore \quad |5x+2| > 0; \;\; \forall x, x \in \mathbb{R}, \;$ tal que $\; x \neq \dfrac{-2}{5}$

$\therefore \quad S = \mathbb{R} - \left\{ \dfrac{-2}{5} \right\}$

8.) $2|3-x| - 10 \geq 0$

$$\begin{array}{rclll}
2|3-x| - 10 \geq 0 & \Longleftrightarrow & 2|3-x| \; \geq \; 10 & & \\
& \Longleftrightarrow & |3-x| \; \geq \; 5 & & \\
& \Longleftrightarrow & 3-x \; \geq \; 5 & \text{o} & 3-x \; \leq \; -5 \\
& \Longleftrightarrow & -x \; \geq \; 2 & \text{o} & -x \; \leq \; -8 \\
& \Longleftrightarrow & x \; \leq \; -2 & \text{o} & x \; \geq \; 8
\end{array}$$

$\therefore \quad S = \,]-\infty, -2] \cup [8, +\infty[$

9.) $|x-3| \leq 2x - 5$

Nota: en este caso no es posible aplicar alguna de las propiedades de valor absoluto enunciadas en páginas anteriores, por lo que procedemos de la manera siguiente:

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{si} \quad x \geq 3 \\ -(x-3) & \text{si} \quad x < 3 \end{cases}$$

Con esta información construimos la tabla siguiente

	$-\infty$	3	$+\infty$
$\|x-3\|$	$-(x-3)$	$x-3$	
$\|x-3\| \leq 2x-5$	$-(x-3) \leq 2x-5$	$x-3 \leq 2x-5$	
	$-x+3 \leq 2x-5$	$x-2x \leq -5+3$	
	$-x-2x \leq -5-3$	$-x \leq -2$	
	$-3x \leq -8$	$-x \geq -2$	
	$x \geq \frac{8}{3}$		
	Así debe cumplirse	Así debe cumplirse	
	$x \geq \frac{8}{3}$ y $x < 3$	$x \geq 2$ y $x \geq 3$	
	$\therefore \quad S_1 = \left[\frac{8}{3}, 3\right[$	$\therefore \quad S_2 = [3, +\infty[$	

En consecuencia el conjunto solución S, de $|x-3| \leq 2x-5$ es $S_1 \cup S_2$; o sea $S = \left[\frac{8}{3}, +\infty\right[$

10.) $|x| + 3 \geq 2x$

Como

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Con esta información construimos la siguiente tabla:

	$-\infty$	0	$+\infty$
$\|x\|$	$-x$	x	
$\|x\| + 3 \geq 2x$	$-x+3 \geq 2x$	$x+3 \geq 2x$	
	$-x-2x \geq -3$	$x-2x \geq -3$	
	$-3x \geq -3$	$-x \geq -3$	
	$x \leq 1$	$x \leq 3$	
	Así debe cumplirse	Así debe cumplirse	
	$x \leq 1$ y $x < 0$	$x \leq 3$ y $x \geq 0$	
	$\therefore \quad S_1 =]-\infty, 0[$	$\therefore \quad S_2 = [0, 3]$	

En consecuencia el conjunto solución S, de $|x| + 3 \geq 2x$ es $S_1 \cup S_2$ o sea $S =]-\infty, 3]$

11.) $\sqrt[6]{(2x+1)^6} > 3$

$$\begin{aligned}
\sqrt[6]{(2x+1)^6} > 3 \quad &\Longleftrightarrow \quad |2x+1| > 3 \\
&\Longleftrightarrow \quad 2x+1 > 3 \quad \text{o} \quad 2x+1 < -3 \\
&\Longleftrightarrow \quad 2x > 2 \quad \text{o} \quad 2x < -4 \\
&\Longleftrightarrow \quad x > 1 \quad \text{o} \quad x < -2
\end{aligned}$$

$S_1 =]1, +\infty[$ y $S_2 =]-\infty, -2[$

El conjunto solución S, de $\sqrt[6]{(2x+1)^6} > 3$ es $S_1 \cup S_2$, o sea $S =]1, +\infty[\cup]-\infty, -2[$

12.) $\sqrt{\left(\dfrac{2}{5}x+1\right)^2} - x < 2$

$$\sqrt{\left(\frac{2}{5}x+1\right)^2} - x < 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \left|\frac{2}{5}x+1\right| - x < 2$$

Para este caso se tiene que:

$$\left|\frac{2}{5}x+1\right| = \begin{cases} \dfrac{2}{5}x+1 & \text{si} \quad x \geq \dfrac{-5}{2} \\[2ex] -\left(\dfrac{2}{5}x+1\right) & \text{si} \quad x < \dfrac{-5}{2} \end{cases}$$

Con esta informaión construimos la tabla siguiente:

	$-\infty$	$\frac{-5}{2}$	$+\infty$
$\left\|\frac{2}{5}x+1\right\|$	$-\left(\frac{2}{5}x+1\right)$	$\frac{2}{5}x+1$	
$\left\|\frac{2}{5}x+1\right\| - x \ < \ 2$	$-(\frac{2}{5}x+1) - x \ < \ 2$ $\frac{-2}{5}x - 1 - x \ < \ 2$ $\frac{-2}{5}x - x \ < \ 2+1$ $\frac{-7}{5}x \ < \ 3$ $x \ > \ \frac{-15}{7}$ Así debe cumplirse $x \ > \ \frac{-15}{7}$ y $x \ < \ \frac{-5}{2}$ $\therefore \quad S_1 = \emptyset$	$\frac{2}{5}x + 1 - x \ < \ 2$ $\frac{2}{5}x - x \ < \ 2-1$ $\frac{-3}{5}x \ < \ 1$ $x \ > \ \frac{-5}{3}$ Así debe cumplirse $x \ > \ \frac{-5}{3}$ y $x \ \geq \ \frac{-5}{2}$ $\therefore \quad S_2 = \left]\frac{-5}{3}, +\infty\right[$	

$$\therefore \quad S = \ S_1 \cup S_2 \ = \ \left]\frac{-5}{3}, +\infty\right[$$

Ejercicios 5

Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones:

1.) $|2x-3| < 7$

2.) $|3x+5| \leq 12$

3.) $\sqrt{(9x+8)^2} \leq -3$

4.) $|13x-15| > 0$

5.) $|3+2x| > 5$

6.) $|-2x+6| \geq -4$

7.) $|2x-7| + x \geq 6$

8.) $\sqrt[8]{(5-2x)^8} < x-7$

9.) $2|3-x| + 3x > 3$

10.) $-2|7+x| - 3x \leq 0$

11.) $\sqrt{\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{3}\right)^2} \geq 1$

12.) $2\sqrt{(2x+7)^2} \leq x$

Ejercicios 6

Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones:

1.) $|x-1| + |x+1| < 4$
2.) $|x-2| + 3|x| \leq 6$
3.) $|4-x| + |2x-5| > 7-x$
4.) $|x| - 2\sqrt{(6-x)^2} \geq x$

Solución

1.) $|x-1| + |x+1| < 4$

En este caso se tiene que:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x \geq -1 \\ -(x+1) & \text{si} \quad x < -1 \end{cases}$$

Así:

	$-\infty$ … -1	-1 … 1	1 … $+\infty$
$\|x-1\|$	$-(x-1)$	$-(x-1)$	$x-1$
$\|x+1\|$	$-(x+1)$	$x+1$	$x+1$
$\|x-1\| + \|x+1\| < 4$	$-(x-1) + -(x+1) < 4$ $-x+1-x-1 < 4$ $-2x < 4$ $x > -2$ $S_1 =]-2,-1[$	$-(x-1) + x + 1 < 4$ $-x+1+x+1 < 4$ $2 < 4$ $S_2 = [-1,1[$	$x-1+x+1 < 4$ $2x < 4$ $x < 2$ $S_3 = [1,2[$

$\therefore$ Como $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, entonces: $S =]-2,2[$

2.) $|x-2|+3|x|\leq 6$

En este caso se tiene que:

$$|x-2|=\begin{cases} x-2 & \text{si} \quad x\geq 2 \\ -(x-2) & \text{si} \quad x<2 \end{cases}$$

y

$$|x|=\begin{cases} x & \text{si} \quad x\geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$$

Con esta información construimos la siguiente tabla:

	$-\infty$ 0	0 2	2 $+\infty$
$\|x-2\|$	$-(x-2)$	$-(x-2)$	$x-2$
$\|x\|$	$-x$	x	x
$\|x-2\|+3\|x\|\leq 6$	$-(x-2)+3(-x)\leq 6$ $-x+2-3x\leq 6$ $-4x\leq 6-2$ $-4x\leq 4$ $x\geq -1$ $S_1 \ = \ [-1,0[$	$-(x-2)+3x\leq 6$ $-x+2+3x\leq 6$ $2x\leq 6-2$ $2x\leq 4$ $x\leq 2$ $S_2 \ = \ [0,2[$	$x-2+3x\leq 6$ $4x\leq 6+2$ $4x\leq 8$ $x\leq 2$ $S_3 \ = \ \{2\}$

Como $S=S_1\cup S_2\cup S_3$ entonces $S=[-1,2]$

3.) $|4-x|+|2x-5|>7-x$

Como:

$$|4-x|=\begin{cases} 4-x & \text{si} \quad x\leq 4 \\ -(4-x) & \text{si} \quad x>4 \end{cases}$$

y

$$|2x-5|=\begin{cases} 2x-5 & \text{si} \quad x\geq \dfrac{5}{2} \\ -(2x-5) & \text{si} \quad x<\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Así:

	$-\infty$	$5/2$	4	$+\infty$
$\lvert 4-x\rvert$	$4-x$	$4-x$	$-(4-x)$
$\lvert 2x-5\rvert$	$-(2x-5)$	$2x-5$	$2x-5$
$\lvert 4-x\rvert+\lvert 2x-5\rvert>7-x$	$4-x+-(2x-5)>7-x$ $4-x-2x+5>7-x$ $-x-2x+x>7-5-4$ $-2x>-2$ $x<1$ $S_1 =]-\infty,1[$	$4-x+2x-5>7-x$ $-x+2x+x>7+5-4$ $2x>8$ $x>\frac{8}{2}$ $x>4$ $S_2 = \emptyset$	$-(4-x)+2x-5>7-x$ $-4+x+2x-5>7-x$ $x+2x+x>7+5+4$ $4x>16$ $x>4$ $S_3 =]4,+\infty[$

Como $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ entonces $S =]-\infty,1[\cup]4,+\infty[$

4.) $|x| - 2\sqrt{(6-x)^2} \geq x$

$$\begin{aligned} |x| - 2\sqrt{(6-x)^2} &\geq x \iff \\ |x| - 2|6-x| &\geq x \end{aligned}$$

Además:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

y

$$|6-x| = \begin{cases} 6-x & \text{si} \quad x \leq 6 \\ -(6-x) & \text{si} \quad x > 6 \end{cases}$$

Así:

$-\infty \qquad 0 \qquad 6 \qquad +\infty$

$\|x\|$	$-x$	x	x
$\|6-x\|$	$6-x$	$6-x$	$-(6-x)$
$\|x\|-2\|6-x\| \geq x$	$-x-2(6-x) \geq x$ $-x-12+2x \geq x$ $-x+2x-x \geq 12$ $0 \geq 12$ $\therefore \quad S_1 = \emptyset$	$x-2(6-x) \geq x$ $x-12+2x \geq x$ $x+2x-x \geq 12$ $2x \geq 12$ $x \geq 6$ $\therefore \quad S_2 = \{6\}$	$x-2(-(6-x)) \geq x$ $x+2(6-x) \geq x$ $x+12-2x \geq x$ $x-2x-x \geq -12$ $-2x \geq -12$ $x \leq 6$ $\therefore \quad S_3 = \emptyset$

De aquí se tiene que: $S = \{6\}$

Ejercicios 7

Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones:

1.) $|x-6| + |x| < 4$

2.) $4|x-2| + 3|x| \geq 6$

3.) $3|x-4| - |2x| \leq x - 6$

4.) $\sqrt{(x-3)^2} + |4-5x| > 7$