POLINOMIOS

Teoría

1.- ¿Qué es un polinomio?

Un polinomio es una expresión algebraica (conjunto de números y letras que representan números, conectados por las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación…) compuesta de distintos términos conectados por la operación de suma. En un polinomio, estos términos serán **monomios.**

2.- ¿qué es un monomio?

Un monomio es una expresión algebraica, compuesta de un valor conocido (un número) al que llamamos coeficiente del monomio, que multiplica a un conjunto de letras, llamadas parte literal.

Dos monomios se dicen semejantes si tienen exactamente la misma parte literal.

Ejemplo: $-3x^2y^3$; $5xy^2$ Son monomios; $5xy^2-3x^2y^3$ es un polinomio cuyos términos son los monomios anteriores.

3.- Grado de un polinomio.

El grado de un monomio es el número de letras (contadas tantas veces como indica su exponente) de la parte literal.

Ejemplo: $-3x^2y^3$; tiene grado 6 (2+5) ; $5xy^2$ tiene grado 3 (1+2)

El grado de un polinomio es el mayor de los grados de sus términos.

Ejemplo: $5xy^2-3x^2y^3$; tiene grado 6 (el mayor entre 6 y 3)

NOTA: ***Los polinomios son expresiones algebraicas, y como tales representan números, por tanto hay que considerarlos como números. La diferencia es que un número es algo fijo, y un polinomio representa a la vez distintos números, en función de los valores concretos que se den a la parte literal.***

4.- **Valor numérico de un polinomio.**

Un polinomio se puede designar con una letra (generalmente mayúscula), por ejemplo, al polinomio $5xy^2-3x^2y^3$ lo designamos por la letra P. Para indicar que el polinomio P, topmará valores numéricos dependiendo de los valores que tomen las letras x e y, se indicará P(x,y). Así, si queremos saber cuánto vale el polinomio A, para los valores x = 2, y = -1, será $P(2,1)= 5\cdot 2\cdot(-1)^2-3\cdot 2^2\cdot(-1)^3=$
$=5\cdot 2\cdot 1-3\cdot 2\cdot(-1)=5\cdot 2+3\cdot 2=10+6=16\rightarrow \boxed{P(2,1)=16}$

5.- Operaciones con polinomios.

5.1.-Suma de polinomios

La suma de dos polinomios consiste en colocar todos los términos de los polinomios en un nuevo polinomio, y agrupar luego los monomios semejantes.

Restar un polinomio consiste en sumar el opuesto, es decir, el polinomio obtenido al cambiar el signo a todos los coeficientes del polinomio.

Agrupar los monomios semejantes consiste en sumar sus coeficientes y mantener la parte literal.

ATENCIÓN: ***Ojo al sumar los coeficientes, ¡¡si tienen signo menos hay que restarlos!!***

Ejemplo: Sean $A(x) = 5x^2+3x+2$, $B(x) = 6x^3+4x^2-3x-3$,

$C(x) = -4x^2-2x+5$, calcular $D(x) = A(x) +B(x)-C(x)$.

En primer lugar sumaremos A(x) y B(x) colocando todos sus términos en un nuevo polinomio:

$5x^2+3x+2+6x^3+4x^2-3x-3$

Ahora agrupamos monomios semejantes: $5x^2$ con $4x^2$, $3x$ con $-3x$ y 2 con -3:

$6x^3+(5+4)x^2+(3-3)x+(2-3)= 6x^3+9x^2+0x +(-1)= 6x^3+9x^2 -1$

Ahora, para restar C(x), sumamos su opuesto, es decir

$-C(x)=4x^2+2x-5$:

$D(x) =A(x)+B(x)-C(x)= 6x^3+9x^2-1+4x^2+2x-5 =$

$6x^3+(9+4)x^2+2x+(-5-1)= 6x^3+13x^2+2x+(-6)= \boxed{6x^3+13x^2+2x-6}$

5.2.-Producto de polinomios

El producto de dos polinomios, consiste en multiplicar cada uno de los términos del primer polinomio con cada uno de los términos del segundo, siendo el resultado un polinomio cuyos términos son todos estos productos. Finalmente habrá que agrupar los términos semejantes para obtener el polinomio prioducto.

La multiplicación de cada par de términos se hace de la siguiente forma:

1º.- Se multiplican coeficientes:

a) Se multiplican los signos

b) Se multiplican los números

2º.- Se multiplican las partes literales, para ello, se suman los exponentes de las diferentes letras

ATENCIÓN: ***Ojo al multiplicar los coeficientes, ¡¡si alguno tiene signo menos hay que tener cuidado!!***

RECUERDA: $\boxed{+\cdot+=+}$ $\boxed{+\cdot-=-}$ $\boxed{-\cdot+=-}$ $\boxed{-\cdot-=+}$

Ejemplo: Obtener $E(x) = A(x)\cdot B(x)$ siendo $A(x)$ y $B(x)$ los polinomios del ejemplo anterior

$E(x)= (5x^2+3x+2)\cdot(6x^3+4x^2-3x-3)$

Las parejas posibles de términos de $A(x)$ con términos de $B(x)$ serán:

Para el término $5x^2$ de $A(x)$:

$(5x^2)\cdot(6x^3)$; $(5x^2)\cdot(4x^2)$; $(5x^2)\cdot(-3x)$; $(5x^2)\cdot(-3)$

Para el término $3x$ de $A(x)$:

$(3x)\cdot(6x^3)$; $(3x)\cdot(4x^2)$; $(3x)\cdot(-3x)$; $(3x)\cdot(-3)$

Para el término 2 de $A(x)$:

$(2)\cdot(6x^3)$; $(2)\cdot(4x^2)$; $(2)\cdot(-3x)$; $(2)\cdot(-3)$

Así hay que hacer 12(3x4) multiplicaciones de términos, el número de términos de A(x) (3), por el número de términos de B(X) (4).

Así quedará:

$E(x)= (5x^2)\cdot(6x^3) + (5x^2)\cdot(4x^2) + (5x^2)\cdot(-3x) + (5x^2)\cdot(-3) +$

$+(3x)\cdot(6x^3)+(3x)\cdot(4x^2)+(3x)\cdot(-3x)+(3x)\cdot(-3)+(2)\cdot(6x^3)+(2)\cdot(4x^2)+$

$+(2)\cdot(-3x)+(2)\cdot(-3) = 30x^5+20x^4-15x^3-15x^2+18x^4+12x^3-9x^2-9x +$

$+12x^3+8x^2-6x-6 =30x^5+(20+18)x^4+(-15+12+12)x^3+(-15-9+8)x^2+$

$+(-9-6)x+(-6) = \boxed{30x^5+38x^4+9x^3-16x^2-15x-6}$

5.3.-División de polinomios

Para dividir polinomios, el polinomio dividendo, tiene que tener grado mayor o igual que el divisor. El algoritmo para dividir es el siguiente:

Paso 1º: Colocar los polinomios dividendo y divisor para dividirlos de la forma Dividendo $\underline{|\text{Divisor}\ }$ completando en el dividendo con coeficiente 0 aquellos términos que no aparezcan.

Paso 2º: Dividir el término de mayor grado del dividendo entre el término de mayor grado del divisor, y escribir el término resultante en el lugar reservado al cociente.

Paso 3º: Multiplicar el término obtenido por el polinomio divisor y restar el resultado al polinomio dividendo

Paso 4º: El Polinomio resultado de esa resta es el llamado **resto**. Comprobar si el grado del resto es menor que el del polinomio divisor, si es así, **la división se ha terminado**. En caso contrario, El polinomio **Resto** es ahora el nuevo dividendo, y volvemos al paso 2º.

Dividir el término de mayor grado del dividendo entre el término de mayor grado del divisor consiste en una división de monomios que se hace de la siguiente forma:

1º.- Se dividen coeficientes:

a) Se dividen los signos

b) Se dividen los números, dejando el resultado expresado como fracción irreducible, si la división no es exacta.

2º.- Se dividen las partes literales, para ello, se restan los exponentes de las diferentes letras

ATENCIÓN: ***Ojo al dividir los coeficientes, ¡¡si alguno tiene signo menos hay que tener cuidado!!***

Ojo al dividir coeficientes fraccionarios. ¡¡Si no te aclaras divide aparte!!

RECUERDA: $\boxed{+:+=+}$ $\boxed{+:-=-}$ $\boxed{-:+=-}$ $\boxed{-:-=+}$

Ejemplo: Obtener F(x) y G(x) siendo F(x) el cociente obtenido al dividir B(x) entre A(x) y G(x) el resto. Siendo A(x) y B(x) los polinomios del ejemplo anterior

Paso 1°: $6x^3+4x^2-3x-3 \;\big|\; \underline{5x^2+3x+2}$

Paso 2°: $6x^3+4x^2-3x-3 \;\big|\; \underline{5x^2+3x+2}$

$$\frac{6}{5}x^{(3-2)}$$

$$6x^3+4x^2-3x-3 \;\big|\; \underline{5x^2+3x+2}$$

$$\frac{6}{5}x$$

Paso 3°: $\left(\frac{6}{5}x\right)\cdot(5x^2+3x+2)= 6x^3+\frac{18}{5}x^2+\frac{12}{5}x;$

$$\begin{array}{rrrr|l} 6x^3 & +\;4x^2 & -\;3x & -3 & \underline{5x^2+3x+2} \\ -6x^3 & -\;\frac{18}{5}x^2 & -\;\frac{12}{5}x & & \frac{6}{5}x \\ \hline \cancel{} & \left(4-\frac{18}{5}\right)x^2 & +\left(-3-\frac{12}{5}\right)x & -3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|l} 6x^3 & +\;4x^2 & -\;3x & -3 & \underline{5x^2+3x+2} \\ -6x^3 & -\;\frac{18}{5}x^2 & -\;\frac{12}{5}x & & \frac{6}{5}x \\ \hline \cancel{} & \frac{(20-18)}{5}x^2 & +\frac{(-15-12)}{5}x & -3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|l} 6x^3 & +\;4x^2 & -\;3x & -3 & \underline{5x^2+3x+2} \\ -6x^3 & -\;\frac{18}{5}x^2 & -\;\frac{12}{5}x & & \frac{6}{5}x \\ \hline \cancel{} & \frac{2}{5}x^2 & -\frac{27}{5}x & -3 & \end{array}$$

Paso 4º: El resto es $\frac{2}{5}x^2-\frac{27}{5}x-3$ que tiene grado 2. Este grado no es menor que el grado del divisor, por lo que volvemos al paso 2, siendo ahora el dividendo el polinomio $\frac{2}{5}x^2-\frac{27}{5}x-3$.

Paso 2º: dividiremos el término de mayor grado ($\frac{2}{5}x^2$) entre el término de mayor grado del divisor ($5x^2$), obteniendo como coeficiente el resultado de dividir $\frac{2}{5}$ entre 5, es decir:

$\frac{2}{5}:5=\frac{2\cdot 1}{5\cdot 5}=\frac{2}{25}$ y como parte literal, al restar los exponentes de la letra 'x' será $x^{1-1}=$

$=x^0=1$; es decir, desaparece la parte literal, quedando únicamente $\frac{2}{25}$. Así quedará:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
6x^3 & +4x^2 & -3x & -3 & 5x^2+3x+2 \\ \cline{5-5}
-6x^3 & -\frac{18}{5}x^2 & -\frac{12}{5}x & & \frac{6}{5}x+\frac{2}{25} \\ \cline{1-4}
\diagup & \frac{2}{5}x^2 & -\frac{27}{5}x & -3 &
\end{array}
$$

Paso 3º:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
6x^3 & +4x^2 & -3x & -3 & 5x^2+3x+2 \\ \cline{5-5}
-6x^3 & -\frac{18}{5}x^2 & -\frac{12}{5}x & & \frac{6}{5}x+\frac{2}{25} \\ \cline{1-4}
\diagup & \frac{2}{5}x^2 & -\frac{27}{5}x & -3 & \\
 & -\frac{2}{5}x^2 & -\frac{6}{25}x & -\frac{4}{25} & \\ \cline{2-4}
\end{array}
$$

$$+\left(\frac{-135-6}{25}\right)x+\left(\frac{-75-4}{25}\right)$$

Quedando de Resto $-\frac{141}{25}x-\frac{141}{25}$

Paso 4º: Como el grado del resto, que es 1, es menor que el del divisor, que es 2. Hemos terminado, quedando:

$$\boxed{F(x) = \frac{6}{5}x + \frac{2}{25} \text{ y } G(x) = -\frac{141}{25}x-\frac{141}{25}}$$

6.- Factorizar polinomios.

Factorizar un polinomio, consiste en expresar un polinomio como producto de dos o más polinomios. Para ello, nos servimos de dos herramientas fundamentales:

1ª: *Sacar factor común*: Consiste en expresar un polinomio como producto de un monomio (el factor común) por un polinomio. El factor común será un monomio que tenga por coeficiente el MCD de los coeficientes del polinomio, y por parte literal, la parte literal del término de menor grado del polinomio. Al sacar factor común, el polinomio que queda multiplicando al factor común se obtiene dividiendo el polinomio que teníamos por el factor común.

Ejemplo: Factorizar sacando factor común el polinomio

$P(x)= 25x^6+30x^4-10x^2$

El MCD(25,30,10)= 5; El término de menor grado es el $10x^2$, así, el factor común será $5x^2$.

Si dividimos P(x) entre $5x^2$ obtenemos: $\frac{25}{5}x^{6-2}+\frac{30}{5}x^{4-2}-\frac{10}{5}x^{2-2}=$

$\frac{25}{5}x^4+\frac{30}{5}x^2-\frac{10}{5}$. Así, el polinomio P(x) queda factorizado

expresado como producto del monomio $5x^2$ y el polinomio

$\frac{25}{5}x^4+\frac{30}{5}x^2-\frac{10}{5}$, de la siguiente manera:

$$\boxed{P(x)=5x^2\cdot(\frac{25}{5}x^4+\frac{30}{5}x^2-\frac{10}{5})}$$

2ª: Utilizar las identidades notables: Consiste en observar que un polinomio es una expresión de las que se obtienen al desarrollar el cuadrado de una suma, el cuadrado de una diferencia o el producto de una suma por una diferencia y expresarlo de la manera que corresponda.

RECUERDA:

$$\boxed{(a+b)^2=a^2+b^2+2ab}$$

$$\boxed{(a-b)^2=a^2-b^2-2ab}$$

$$\boxed{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}$$

Ejemplo: Factorizar sacando factor común los polinomios

$S(x)= 4x^6+12x^3+9$

$M(x)=x^2-8x+16$

$T(x)=x^8-1$

Para el primero, observamos que en el desarrollo del cuadrado de una suma, si a= $2x^3$ y b= 3, será : $[(2x^3) +3]^2=(2x^3)^2+3^2+2\cdot(2x^3)\cdot 3=$
$= 2^2\cdot(x^3)^2+9+12x^3=4x^6+9+12x^3= 4x^6+12x^3+9 =S(x)$.

Así pues S(x) es el desarrollo de una suma y se factopriza así:

$\boxed{S(x)= (2x^3 +3)^2}$.

Para el segundo, observamos que en el desarrollo del cuadrado de una diferencia, si a=x y b=4, será $(x-4)^2=x^2+4^2-2\cdot x\cdot 4=x^2+16-8x =$ $=x^2-8x+16 =M(x)$. Así queda factorizado $\boxed{M(x)= (x-4)^2}$

Para el tercero, observamos que en el desarrollo de una suma por una diferencia,si $a = x^4$, $b=1$,será $(x^4+1)\cdot(x^4-1)= (x^4)^2-1^2= x^8-1=T(x)$

Así, queda $T(x)= (x^4+1)\cdot(x^4-1)$.

A su vez, x^4-1, se puede factorizar, ya que si $a= x^2$ y $b= 1$, en el desarrollo una vez más de una suma por una diferencia, será:

$(x^2+1)\cdot(x^2-1)= (x^2)^2-1^2=x^4-1$.

Así, quedará: $T(x) =(x^4+1)\cdot(x^4-1)= (x^4+1)\cdot(x^2+1)\cdot(x^2-1)$.

Aún el último factor (x^2-1), se puede factorizar por ser el desarrollo de una suma por una diferencia para a=x y b=1.

Quedando $(x^2-1)=(x+1)\cdot(x-1)$.

Finalmente pues queda factorizado T(x) así:

$\boxed{T(x)= (x^4+1)\cdot(x^2+1)\cdot(x+1)\cdot(x-1)}$

7.- Fracciones algebraicas.

Como hemos visto, los polinomios se tienen que considerar como números, y por tanto, tiene sentido considerar una fracción donde el numerador y el denominador sean, en lugar de números, polinomios. A esta fracción se le denomina fracción algebraica.

RECUERDA: Para simplificar una fracción numérica,se descomponían en factores primos el numerador y el denominador, y se simplificaban aquellos factores que tenían en común.

Las fracciones algebraicas también se pueden simplificar, para ello, habrá que factorizar el numerador y el denominador, y, si tienen algún polinomio factor en común, este se puede eliminar de ambos.

Ejemplo: Sea la fracción algebraica $\frac{x^8-1}{5x^5-5x}$, Simplificarla tanto como sea posible.

En primer lugar factorizamos el numerador, que, como vimos en el ejemplo anterior será $x^8-1=(x^4+1)\cdot(x^2+1)\cdot(x+1)\cdot(x-1)$.

En segundo lugar, factorizamos el denominador. Observamos que se puede sacar factor común, que será el monomio 5x, quedando $5x^5-5x=5x\cdot(x^4-1)$

Ahora observamos que podemos seguir factorizando, pues x^4-1 es el desarrollo de una suma por una diferencia, siendo los sumandos x^2 y 1. Quedando $x^4-1=(x^2+1)\cdot(x^2-1)$.

El último factor, x^2-1 se puede factorizar más, quedando $X^2-1=(x+1)\cdot(x-1)$.

Así, el numerador queda:

$5x^5-5x=5x\cdot(x^2+1)\cdot (x+1)\cdot(x-1)$.

Por tanto la fracción algebraica quedará, factorizando el numerador y el denominador como sigue:

$\frac{(x^4+1)\cdot(x^2+1)\cdot(x+1)\cdot(x-1)}{5x\cdot(x^2+1)\cdot(x+1)\cdot(x-1)}$ que, simplificando los factores comunes queda:

$$\boxed{\frac{x^8-1}{5x^5-5x}=\frac{x^4+1}{5x}}$$