MATRICES

Definición: Una matriz A, es un arreglo rectangular de elementos ordenados en m filas y n columnas.

$$A = \left[a_{ij}\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

donde A es el nombre de la matriz, a_{ij} es el elemento en el renglón i y la columna j.

El orden o dimensión de una matriz está dado por el número de filas y columnas, es decir una matriz de m filas y n columnas es de orden mxn

Si una matriz tiene sólo una fila se le denomina matriz fila o vector fila y si tiene una sola columna se le denomina matriz columna o vector columna.

$$\text{vector fila} \quad \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{bmatrix}_{1xn} \qquad \text{vector columna} \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}_{mx1}$$

Una matriz que tiene el mismo número de filas que de columnas se denomina matriz cuadrada.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 7 & 4 & -2 \end{bmatrix}_{3x3}$$

Si el número de filas no es igual al número de columnas se la llama matriz rectangular.

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}_{3x2}$$

Diagonal principal.
En una matriz cuadrada, la diagonal principal es el conjunto de elemento a_{ij} tales que i = j.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -3 & 8 & 2 \\ 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

La diagonal principal esta formada por los elementos 1, 8, -1

Matriz diagonal.

Es una matriz cuadrada en que los elementos no diagonales son todos cero.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Matriz identidad.
Es una matriz cuadrada cuyos elementos en la diagonal principal son todos iguales a 1 y los demás son cero.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz nula.
Es aquella donde todos lo elementos son cero.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz triangular superior.
Es una matriz en que todos los elementos debajo de la diagonal principal son cero.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Matriz simétrica.
Es una matriz cuadrada en que $a_{ij} = a_{ji}$, para todo i,j.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Traza de una matriz.
Es la suma de los elementos de la diagonal principal $\mathrm{Tr}(A) = \sum a_{ij}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Tr}(B) = 1 + 8 - 1 = 8$$

Matriz transpuesta.
En una matriz A, su transpuesta A^t o A', es una matriz cuyas filas son la columnas de A.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -3 \\ -1 & 8 & 4 \end{bmatrix}_{2x3}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 8 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}_{3x2}$$

Suma de matrices.
Sean A y B dos matrices del mismo tamaño. La suma de A y B, denotada por A + B, es la matriz obtenida al suma los elementos correspondientes de A y B.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & 8 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & -3 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 4 & 8 & -4 \\ 7 & 9 & 5 \end{bmatrix}$$

Multiplicación escalar.
El producto de un escalar *k* y una matriz A, denotado como *k*A o A*k*, es la matriz obtenida al multiplicar cada elemento de A por *k*.

$$k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

$$2\begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 8 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

También definimos que.

-A = (-1)A y A – B = A + (–B)

Multiplicación de matrices.
Sean A y B dos matrices tales que el número de columnas de A es igual al número de filas de B, el producto de A y B, es la matriz que se obtiene multiplicando a los elementos de la fila i de A por los correspondientes elementos de la columna j de B y luego sumando todos estos productos.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & c_{ij} & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

en donde

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}_{2x3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}_{2x2} \begin{bmatrix} (1)(2)+(3)(3) & (1)(0)+(3)(-2) & (1)(-4)+(3)(6) \\ (2)(2)+(-1)(3) & (2)(0)+(-1)(-2) & (2)(-4)+(-1)(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -6 & 14 \\ 1 & 2 & -14 \end{bmatrix}_{2x3}$$

Si el número de columnas de A no es igual al número de filas de B, entonces el producto AB no está definido.

Determinante de una matriz.
El determinante de una matriz A es un escalar y de denota por Δ o $|A|$ o det(A) se define como

$$\det(A) = \sum (\pm) a_{i1}a_{j2}a_{k3}\cdots a_{rn}$$

donde la suma se hace sobre todas las permutaciones de los primeros subíndices de a y $(\pm)$ toma el signo más si la permutación es par y menos si la permutación es impar.

Los determinantes de orden uno, dos y tres se definen como sigue:

$$|a_{11}| = a_{11}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Ejemplos:

$$|3| = 3$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (-1)(5) - (2)(3) = -11$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & -6 \\ 3 & -4 & 3 \end{vmatrix} &= -1\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \\ &= -1[(2)(3) - (-6)(-4)] - 3[(2)(3) - (-6)(3)] + 5[(2)(-4) - (2)(3)] \\ &= -1(6 - 24) - 3(6 + 18) + 5(-8 - 6) \\ &= 18 - 72 - 70 \\ &= -124 \end{aligned}$$

Nota: El determinante de una matriz triangular superior es igual a multiplicar a los elementos de la diagonal principal.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (2)(-3)(4) = -24$$

Matriz de menores.

La matriz de menores M de una matriz A se obtiene de la siguiente manera; para el elemento $M_{ij,}$ calcular el determinante de A omitiendo el renglón i y la columna j.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$M_{11} = |a_{22}| = a_{22}, M_{12} = |a_{12}| = a_{12,\ldots}$$

$$M = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Matriz de cofactores.
El cofactor de cof_{ij} del elemento a_{ij} se define como

$$cof_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Para lo cual es útil cambiar sólo los signos de acuerdo a la siguiente regla

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Sea la matriz A, calcular la matriz de menores y cofactores.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \, ; \; M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 8 \, ; \; M_{31} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

Matriz de menores de A

$$M = \begin{bmatrix} -2 & -6 & -10 \\ 1 & 3 & 8 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriz de cofactores de A

$$cof(A) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz singular.
Una matriz cuyo determinante es cero se denomina matriz singular.

Inversa de una matriz.
Dada una matriz cuadrada A, se dice que la matriz B es la inversa de A si y solo si, el producto de AB es la identidad I, AB = I y B se denota como A^{-1}.

Para calcular la inversa de una matriz se sigue la siguiente regla.

1) Calcular el determinante
2) Encontrar la matriz de menores
3) Calcular la matriz de cofactores de la matriz de menores obtenida
4) Trasponer la matriz de cofactores
5) Dividir la matriz resultante con el determinante de la matriz original

Nota 1: La matriz resultante de aplicarle los pasos 2), 3) y 4) a la matriz A, se le llama matriz adjunta, entonces

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)}$$

Nota 2: El orden en que se efectúen las operaciones de los pasos 2) 3) y 4) no altera el resultado final en la matriz adjunta.

Ejemplo: Calcular la matriz inversa de A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1) *det(A) = -6*

2) $\begin{bmatrix} -2 & -6 & -10 \\ 1 & 3 & 8 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ menores de A

3) $\begin{bmatrix} -2 & 6 & -10 \\ -1 & 3 & -8 \\ -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ cofactores de la matriz de menores

4) $\begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 6 & 3 & -3 \\ -10 & -8 & 4 \end{bmatrix}$ transpuesta de la matriz de cofactores

5) $A^{-1} = \dfrac{\begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 6 & 3 & -3 \\ -10 & -8 & 4 \end{bmatrix}}{-6} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$

SISTEMAS DE ECUACIONES SIMULTANEAS

Considérese un sistema de la forma:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2\\
&\vdots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}
$$

Donde a_{ij}, b_i son números reales, lo podemos escribir como:

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{Bmatrix}
$$

Es decir

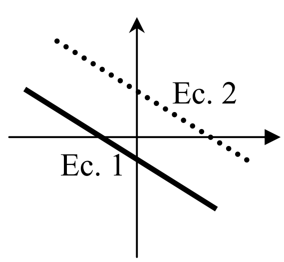
$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Donde **A** es la matriz de coeficientes del sistema, **b** el termino independiente y x las incógnitas.

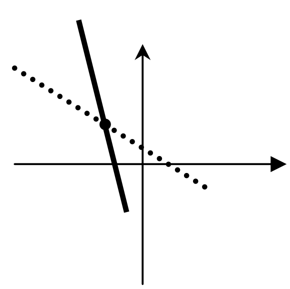
La solución es un conjunto donde n valores de x, satisfacen las soluciones simultáneamente. Presentando alguno de los siguientes casos:

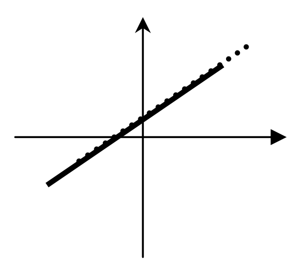
Caso 1: m = n sistema compatible y determinado. El número de ecuaciones es igual al número de incógnitas.
Caso 2: m < n sistema subdeterminado, el número de ecuaciones es menor que el de las incógnitas.
Caso 3: m > n sistema sobredeterminado, el número de ecuaciones es mayor que el número de incógnitas.

Método Grafico (sistemas de 2x2)
Cuando el sistema es de 2x2, podemos observar la solución graficando las ecuaciones.



No existe solución


Una solución


Infinidad de soluciones

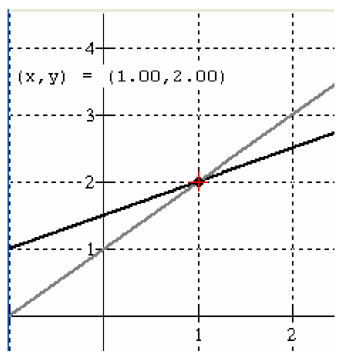
Consideraremos que el número de incógnitas, será igual al número de ecuaciones.

Resolver $-x + 2y = \ \ 3$
$-x + \ \ y = -1$

Despeje el valor de y en cada una de las ecuaciones

$$y = \frac{3x - 3}{2}$$

$$y = x + 1$$



La matriz aumentada se escribe como:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

ELIMINACIÓN GAUSIANA (con sustitución hacia atrás)

La eliminación Gaussiana consta de dos partes, la primera consiste en encontrar mediante sumas y restas, una matriz triangular: La segunda parte consiste en resolver el sistema triangular por sustitución hacia atrás, como:

1.- Intercambiar los renglones (seleccionar un pivote), equivalente a reordenar las ecuaciones.
2.- Multiplicar los elementos de un renglón (pivote) por un escalar diferente de cero.
3.- Sumar todos los elementos correspondientes a los dos renglones para formar una matriz triangular superior.

Ejemplo. Resolver

$$
\begin{aligned}
4x_1 - x_2 + 5x_3 &= -\ 6 \ldots(1)\\
3x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 30 \ldots(2)\\
6x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 33 \ldots(3)
\end{aligned}
$$

Seleccione como pivote el elemento (1,1), multiplique por –3/4 y al producto resultante sume con el renglón (2) del termino a eliminar (2,1).

$$
-\frac{3}{4}\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -4 & 30 \\ 6 & 2 & -3 & 33 \end{array}\right]
\qquad
\begin{array}{cccc|c} -3 & \frac{3}{4} & -\frac{15}{4} & \frac{9}{2} \\ 3 & 3 & -4 & 30 \\ \hline 0 & \frac{15}{4} & -\frac{31}{4} & \frac{69}{2} \end{array}
$$

Repita el procedimiento seleccionando nuevamente el elemento (1,1) como pivote y multiplique por –6/4 y al producto resultante sume con el renglón (3) del termino a eliminar (3,1).

$$
-\frac{6}{4}\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & 5 & -6 \\ 0 & \frac{15}{4} & -\frac{31}{4} & \frac{69}{2} \\ 6 & 2 & -3 & 33 \end{array}\right]
\qquad
\begin{array}{ccc|c} -6 & \frac{3}{2} & -\frac{15}{2} & 9 \\ 6 & 2 & -3 & 33 \\ \hline 0 & \frac{7}{2} & -\frac{21}{2} & 42 \end{array}
$$

Seleccione como pivote el elemento (2,2), multiplique por –14/15 y al producto resultante sume con el renglón (3) del termino a eliminar (3,2).

$$
-\frac{14}{15}\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & 5 & -6 \\ 0 & \frac{15}{4} & -\frac{31}{4} & \frac{69}{2} \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{21}{2} & 42 \end{array}\right]
\qquad
\begin{array}{ccc|c} 0 & -\frac{7}{2} & \frac{217}{30} & -\frac{161}{5} \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{21}{2} & 42 \\ \hline 0 & 0 & -\frac{49}{15} & \frac{49}{5} \end{array}
$$

Ahora que ha formado una matriz triangular superior escriba el sistema de ecuaciones resultante.

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & 5 & -6 \\ 0 & \frac{15}{4} & -\frac{31}{4} & \frac{69}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{49}{15} & \frac{49}{5} \end{array}\right]
\qquad
\begin{aligned}
4x_1 - x_2 + 5x_3 &= -6 \quad \ldots(1')\\
\frac{15}{4}x_2 - \frac{31}{4}x_3 &= \frac{69}{2} \quad \ldots(2')\\
-\frac{49}{15}x_3 &= \frac{49}{5} \quad \ldots(3')
\end{aligned}
$$

Sustituyendo hacia atrás.

Despeje el valor de x_3 en la ecuación (3')

$$x_3 = \frac{-\frac{49}{5}}{\frac{49}{15}} = -3$$

De la ecuación (2') despeje x_2 y sustituya el valor de x_3.

$$\frac{15}{4}x_2 = \frac{69}{2} + \frac{31}{4}x_3 \qquad x_2 = \frac{\frac{69}{2} + \frac{31}{4}(-3)}{\frac{15}{4}} = 3$$

De la ecuación (1') despeje x_1 y sustituya el valor de x_2, x_3.

$$4x_1 = -6 + x_2 - 5x_3 \qquad x_1 = \frac{-6+3-5(-3)}{4} = 3$$

La solución es:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 3 \\ x_2 &= 3 \\ x_3 &= -3 \end{aligned}}$$

El determinante estará dado por:

$$\Delta = 5\left(\frac{15}{4}\right)\left(-\frac{49}{15}\right) = -49$$

Que consiste en multiplicar los elementos de la diagonal principal.

METODO DE GAUSS JORDAN (eliminación completa)

Consiste en obtener un sistema equivalente a partir del original, mediante operaciones elementales sobre los renglones de la matriz ampliada. (se puede encontrar al mismo tiempo, la solución del sistema y la inversa). Siguiendo los pasos del método de sustitución hacia atrás:

1.- Convierta en uno el elemento seleccionado como pivote.
2.- Convierta en ceros todos los elementos de la columna donde se encuentra el pivote.
3.- Seleccione un nuevo pivote, en un renglón y columna diferente al anterior.

4.- Repetir los pasos anteriores hasta obtener una matriz de coeficientes formados por ceros y unos (matriz identidad).

Ejemplo. Resolver

$$
\begin{aligned}
4x_1 - x_2 + 5x_3 &= -\ 6\ldots(1)\\
3x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 30\ldots(2)\\
6x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 33\ldots(3)
\end{aligned}
$$

Obtenga la matriz aumentada, según sea el caso (encontrar la solución, calcular la inversa o ambos), multiplique el elemento pivote por 1/4 para convertirlo en uno.

$$
\left[\begin{array}{ccc|c|ccc}
4 & -1 & 5 & -6 & 1 & 0 & 0\\
3 & 3 & -4 & 30 & 0 & 1 & 0\\
6 & 2 & -3 & 33 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\qquad
\begin{array}{c}\frac{1}{4}\\ \\ \\ \end{array}
\left[\begin{array}{ccc|c|ccc}
4 & -1 & 5 & -6 & 1 & 0 & 0\\
3 & 3 & -4 & 30 & 0 & 1 & 0\\
6 & 2 & -3 & 33 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

Multiplique por –3 el renglón (1) y sume el resultado del producto con el renglón (2) para eliminar el elemento (2,1)

$$
\begin{array}{c}-3\\ \\ \\ \end{array}
\left[\begin{array}{ccc|c|ccc}
1 & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0\\
3 & 3 & -4 & 30 & 0 & 1 & 0\\
6 & 2 & -3 & 33 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\qquad
\begin{array}{ccc|c|ccc}
-3 & \frac{3}{4} & -\frac{15}{4} & \frac{9}{2} & -\frac{3}{4} & 0 & 0\\
3 & 3 & -4 & 30 & 0 & 1 & 0\\
\hline
0 & \frac{15}{4} & -\frac{31}{4} & \frac{69}{2} & -\frac{3}{4} & 1 & 0
\end{array}
$$

Multiplique por -6 el renglón del pivote y sume el producto resultante con el renglón (3) para eliminar el elemento (3,1)

$$
\begin{array}{c}-6\\ \\ \\ \end{array}
\left[\begin{array}{ccc|c|ccc}
1 & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0\\
0 & \frac{15}{4} & -\frac{31}{4} & \frac{69}{2} & -\frac{3}{4} & 1 & 0\\
6 & 2 & -3 & 33 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\qquad
\begin{array}{ccc|c|ccc}
-6 & \frac{3}{2} & -\frac{15}{2} & 9 & -\frac{3}{2} & 0 & 0\\
6 & 2 & -3 & 33 & 0 & 0 & 1\\
\hline
0 & \frac{7}{2} & -\frac{21}{2} & 42 & -\frac{3}{2} & 0 & 1
\end{array}
$$

Seleccione como pivote el elemento (2,2) y convierta en uno multiplicando el renglón (2) por (4/15).

$$\frac{4}{15}\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{15}{4} & -\frac{31}{4} & \frac{69}{2} & -\frac{3}{4} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{21}{2} & 42 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Multiplique por –7/2 el renglón (2) y sume el producto resultante con el renglón (3) para eliminar el elemento (3,2).

$$-\frac{7}{2}\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{31}{15} & \frac{45}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{15} & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{21}{2} & 42 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{ccc|c|ccc} 0 & -\frac{7}{2} & \frac{217}{30} & -\frac{161}{5} & \frac{7}{10} & -\frac{14}{15} & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{21}{2} & 42 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -\frac{49}{2} & \frac{49}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{14}{15} & 1 \end{array}$$

Seleccione el elemento (3,3) como pivote y convierta en uno multiplicando el renglón (3) por –15/49. Elimine el elemento (2,3) multiplicando el renglón (3) por 31/15 y sume el producto resultante con el renglón (2).

$$-\frac{15}{49}\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{31}{15} & \frac{46}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{15} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{49}{15} & \frac{49}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{14}{5} & 1 \end{array}\right]$$

Multiplique el renglón (3) por 31/15 y sume el producto resultante con el renglón (2) para eliminar el elemento (2,3).

$$\frac{31}{15}\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{31}{15} & \frac{46}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{4}{15} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \frac{12}{49} & \frac{2}{7} & -\frac{15}{49} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{ccc|c|ccc} 0 & 0 & \frac{31}{15} & -\frac{31}{5} & \frac{124}{245} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{31}{15} & 3 & -\frac{1}{5} & \frac{4}{15} & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -3 & \frac{15}{49} & \frac{6}{7} & -\frac{31}{49} \end{array}$$

Multiplique el renglón (3) por –5/4 y sume con el renglón (1), para eliminar el elemento (1,3).

$$\begin{array}{c} \\ \\ -\frac{5}{4} \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & \frac{15}{49} & \frac{6}{7} & -\frac{31}{49} \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \frac{12}{49} & \frac{2}{7} & -\frac{15}{49} \end{array}\right] \qquad \begin{array}{ccc|c|ccc} 0 & 0 & -\frac{5}{4} & \frac{15}{4} & -\frac{15}{49} & -\frac{5}{4} & \frac{75}{196} \\ 1 & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \hline 1 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{9}{4} & -\frac{11}{196} & -\frac{5}{4} & \frac{75}{196} \end{array}$$

Multiplique el renglón (2) por 1/4 y sume con el renglón (1), para eliminar el elemento (1,2).

$$\begin{array}{c} \\ \frac{1}{4} \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{9}{4} & -\frac{11}{196} & -\frac{5}{4} & \frac{7}{196} \\ 0 & 1 & 0 & 3 & \frac{15}{49} & \frac{6}{7} & -\frac{31}{49} \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \frac{12}{49} & \frac{2}{7} & -\frac{15}{49} \end{array}\right] \qquad \begin{array}{ccc|c|ccc} 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{15}{196} & \frac{3}{14} & -\frac{31}{196} \\ 1 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{9}{4} & -\frac{11}{196} & -\frac{5}{4} & \frac{75}{196} \\ \hline 1 & 0 & 0 & 3 & \frac{1}{49} & -\frac{1}{7} & \frac{11}{49} \end{array}$$

El resultado final es:

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & \frac{1}{49} & -\frac{1}{7} & \frac{11}{49} \\ 0 & 1 & 0 & 3 & \frac{15}{49} & \frac{6}{7} & -\frac{31}{49} \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \frac{12}{49} & \frac{2}{7} & -\frac{15}{49} \end{array}\right] \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{49} & -\frac{1}{7} & \frac{11}{49} \\ \frac{15}{49} & \frac{6}{7} & -\frac{31}{49} \\ \frac{12}{49} & \frac{2}{7} & -\frac{15}{49} \end{bmatrix}$$

La solución

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = -3 \end{array}}$$

SOLUCIÓN POR METODO DE CRAMER (determinantes)

Considérese un sistema de nxn donde el determinante de **A** estará dado por $|\mathbf{A}|$ y $|\mathbf{B}_i|$ el determinante de la matriz obtenida de intercambiar la columna i de la matriz **A** por la columna del termino independiente **b**.

Entonces la solución estará dada por:

$$\mathbf{x}_i = \frac{|\mathbf{B}_i|}{|\mathbf{A}|}$$

Ejemplo. Resolver

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= -6 \\ 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 30 \\ 6x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 33 \end{aligned}$$

Calcule el determinante de (A)

$$\text{Det(A)} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 3 & 3 & -4 \\ 6 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -49$$

Calcule los valores de x_1, x_2 y x_3 como:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -6 & -1 & 5 \\ 30 & 3 & -4 \\ 33 & 2 & -3 \end{vmatrix}}{-49} = \frac{-147}{-49} = 3 \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -6 & 5 \\ 3 & 30 & -4 \\ 6 & 33 & -3 \end{vmatrix}}{-49} = \frac{-147}{-49} = 3$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 & -6 \\ 3 & 3 & 30 \\ 6 & 2 & 33 \end{vmatrix}}{-49} = \frac{147}{-49} = -3$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 3 \\ x_2 &= 3 \\ x_3 &= -3 \end{aligned}}$$