Polinomios

Introducción

Con el álgebra se pasa del número al símbolo, de lo particular a lo general. La gran expresividad del lenguaje algebraico facilita la obtención de relaciones, propiedades y la resolución de problemas.

Para trabajar eficazmente en matemática se debe operar convenientemente con expresiones algebraicas de forma tal que se puedan transformar en otras expresiones equivalentes más fáciles de manejar.

Además, en Ingeniería, al realizar el modelado matemático de un problema, es frecuente obtener un polinomio. Para encontrar la solución de la situación planteada es necesario conocer las "raíces" de dicho polinomio.

5.1.- Expresiones algebraicas

Se llama expresión algebraica a cualquier combinación de números representados por letras o por letras y cifras, vinculados entre sí por las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Son ejemplos de expresiones algebraicas:

$$2x^3y+3x+z \qquad y^3-\frac{3}{y}+y^2 \qquad \frac{x+2y}{3x-y}$$

$$-3\sqrt{x}+\frac{1}{x} \qquad -5xyz^2$$

En este curso se considerarán expresiones algebraicas en las que intervengan solamente números reales.

5.1.1.- Clasificación de las expresiones algebraicas

Expresiones algebraicas

- **Racionales**
  No hay letras afectadas por el signo radical
  - **Fraccionarias**
    Hay por lo menos una letra en el divisor.
    Ejemplo: $2x+\dfrac{3}{x^2+1}$
  - **Enteras**
    No hay letras en el divisor.
    Ejemplo: $2x^2y+xyz+7$
- **Irracionales**
  Hay por lo menos una letra afectada por el signo radical
  Ejemplo: $\sqrt{x}+3x^2$

5.2.- Expresiones algebraicas enteras

Se estudiarán ahora expresiones algebraicas enteras.

5.3.- Monomios

Los monomios son expresiones algebraicas de un solo término.

Ejemplo:

$$5x^3y$$

En el monomio $5x^3y$:

- el número 5 recibe el nombre de coeficiente,
- x^3y constituye la parte literal.

5.3.1.- Grado de un monomio

Se llama grado de un monomio a la suma de los exponentes de las letras que aparecen en él.

Ejemplo:

El monomio $-2x^4y^2z$ es de grado 7.

5.3.2.- Monomios semejantes

Dos o más monomios son semejantes si tienen la misma parte literal.

Ejemplo:

$-3b^2c$ y $5b^2c$ son monomios semejantes.

Los monomios semejantes pueden sumarse o restarse dando por resultado otro monomio semejante a los anteriores.

Ejemplo:

$$-3b^2c+5b^2c=(-3+5)b^2c=2b^2c$$

5.4.- Polinomios

Un polinomio es una suma algebraica de monomios de distinto grado.

Ejemplo:

$$x^4-3x^2+2y+1$$

Observación

Durante el desarrollo de este tema nos referiremos a polinomios donde la parte literal está constituida solamente por una variable elevada a cualquier exponente natural.

Los polinomios que se estudiarán en esta Unidad son expresiones algebraicas de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde:

- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ son números reales llamados coeficientes.
- a_n es el coeficiente principal.
- a_0 es el término independiente.
- x es la variable, también conocida con el nombre de indeterminada.
- Los exponentes $n, n-1, \ldots, 2, 1, 0$, son números naturales.
- n es el grado del polinomio y se indica $grado\big(P(x)\big) = n$.

Ejemplos:

- ✓ $Q(x) = 3x^5 - 7x^3 + 2x^2 + 1$ es un polinomio de grado 5, que tiene coeficiente principal $a_5 = 3$ y el término independiente es $a_0 = 1$.
- ✓ $G(x) = 2$ es un polinomio de grado cero.
- ✓ $S(x) = 0$ se llama polinomio nulo y no tiene grado.

5.4.1.- Funciones polinómicas

Cada polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ tiene asociada una función polinómica f con dominio y codominio en R, definida por la fórmula

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 .$$

En esta Unidad se hablará indistintamente de polinomios o de funciones polinómicas.

En la Unidad 3 se analizaron en particular las funciones polinómicas de grado uno o funciones lineales y las funciones polinómicas de grado dos o funciones cuadráticas.

5.4.2.- Igualdad de polinomios

Los polinomios

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ y

$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$

son iguales si:

- tienen el mismo grado, es decir $n = m$
- $a_n = b_m$, $a_{n-1} = b_{m-1}$, ... , $a_0 = b_0$

5.4.3.- Valor numérico de un polinomio

Se llama valor numérico de un polinomio $P(x)$ en $x = k$, al valor que toma el polinomio cuando se reemplaza x por k.

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, entonces el valor de $P(x)$ en $x = k$ es

$P(k) = a_n k^n + a_{n-1}k^{n-1} + \ldots + a_2 k^2 + a_1 k + a_0$.

Ejemplo:

Sea $Q(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 1$.

El valor de $Q(x)$ en $x = -2$ es $Q(-2) = 3\cdot(-2)^3 - 2\cdot(-2)^2 + 5\cdot(-2) - 1 = -43$

5.5.- Operaciones con polinomios

5.5.1.- Suma

La suma de dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ es el polinomio $P(x) + Q(x)$ que se obtiene sumando los monomios semejantes que se encuentran en $P(x)$ y $Q(x)$.

Ejemplo:

Dados $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + x$ y $Q(x) = 2x^3 - x^2 + 9$ calcular $P(x) + Q(x)$.

Para sumar polinomios resulta conveniente ordenarlos según potencias decrecientes de x y completar los términos que faltan escribiendo dichos términos con coeficiente cero.

$$\begin{array}{rrrrrr}
P(x) = & 2x^4 & -5x^3 & +0x^2 & +\ x & +0 \\
Q(x) = & & 2x^3 & -\ x^2 & +0x & +9 \\
\hline
P(x)+Q(x) = & 2x^4 & -3x^3 & -\ x^2 & +\ x & +9
\end{array}$$

El grado de $P(x) + Q(x)$ es 4.

5.5.2.- Producto de un número real por un polinomio

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ y k es un número real, entonces:

$$k \cdot P(x) = (k \cdot a_n)x^n + (k \cdot a_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (k \cdot a_2)x^2 + (k \cdot a_1)x + (k \cdot a_0).$$

Ejemplo:

Si $P(x) = 5x^3 + 2x^2 - 5x + 2$,

$(-3)\cdot P(x) = -15x^3 - 6x^2 + 15x - 6$

El grado de $(-3)\cdot P(x)$ es 3

5.5.3.- Resta

La resta de dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, es el polinomio $P(x) - Q(x) = P(x) + (-1)Q(x)$.

Ejemplo:

Dados $P(x) = 3x^4 - 3x^2 + x - 3$ y $Q(x) = -4x^3 + 2x^2 + 3x - 1$ calcular $P(x) - Q(x)$.

Para restar polinomios resulta conveniente ordenarlos según potencias decrecientes de x y completar los términos que faltan escribiendo dichos términos con coeficiente cero.

$$\begin{array}{rl} P(x) = & 3x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x - 3 \\ (-1)\cdot Q(x) = & 4x^3 - 2x^2 - 3x + 1 \\ \hline P(x) - Q(x) = & 3x^4 + 4x^3 - 5x^2 - 2x - 2 \end{array}$$

El grado de $P(x) - Q(x)$ es 4.

5.5.4.- Producto de polinomios

Para realizar el producto de dos polinomios es necesario aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma y las propiedades del producto y de la potenciación.

Ejemplo 1:

$P(x) = x^2 - 3x + 5$ $Q(x) = 2x$

$$\begin{aligned} P(x)\cdot Q(x) &= (x^2 - 3x + 5)\cdot(2x) \\ &= x^2\cdot 2x - 3x\cdot 2x + 5\cdot 2x \\ &= 2x^3 - 6x^2 + 10x \end{aligned}$$

El grado de $P(x)\cdot Q(x)$ es 3.

Ejemplo 2:

$P(x) = x^2 - 3x + 5$ $R(x) = x^3 - 4x^2 + 3$

$$\begin{aligned} P(x)\cdot R(x) &= (x^2 - 3x + 5)\cdot(x^3 - 4x^2 + 3) \\ &= x^5 - 4x^4 + 3x^2 - 3x^4 + 12x^3 - 9x + 5x^3 - 20x^2 + 15 \\ &= x^5 - 7x^4 + 17x^3 - 17x^2 - 9x + 15 \end{aligned}$$

El grado de $P(x)\cdot R(x)$ es 5.

Observación

Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, se verifica que:

$$grado\big(P(x)\cdot Q(x)\big) = grado\big(P(x)\big) + grado\big(Q(x)\big)$$

5.5.5.- Algunos productos especiales

Los productos que se muestran en el siguiente cuadro suelen presentarse con frecuencia en cálculos algebraicos.

Producto	Nombre
$(x+a)\cdot(x-a) = x^2 - ax + ax - a^2 = x^2 - a^2$ $\boxed{(x+a)\cdot(x-a) = x^2 - a^2}$	Diferencia de cuadrados
Cuadrado de un binomio $(x+a)^2 = (x+a)\cdot(x+a) = x^2 + ax + ax + a^2$ $\boxed{(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2}$ $(x-a)^2 = (x-a)\cdot(x-a) = x^2 - ax - ax + a^2$ $\boxed{(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2}$	Trinomio cuadrado perfecto Trinomio cuadrado perfecto
Cubo de un binomio $(x+a)^3 = (x+a)\cdot(x+a)\cdot(x+a)$ $= (x^2 + 2ax + a^2)\cdot(x+a)$ $= x^3 + ax^2 + 2ax^2 + 2a^2x + a^2x + a^3$ $= x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$ $\boxed{(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3}$ $\boxed{(x-a)^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3}$	Cuatrinomio cubo perfecto Cuatrinomio cubo perfecto

5.5.6.- División de polinomios

Cuando se realiza una división entre números se procede del siguiente modo:

$$\begin{array}{r|l} 9 & 4 \\ \hline 1 & 2 \end{array}$$

Se verifica que $9 = 4\cdot 2 + 1$

$$\begin{array}{l|l} \text{dividendo} & \text{divisor} \\ \cline{2-2} \quad \ldots\ldots. & \text{cociente} \\ \quad \text{resto} & \end{array}$$

Dividendo = divisor × cociente + resto

La división de polinomios se efectúa empleando el mismo procedimiento que se usa para dividir los números reales.

Se recuerda que es necesario ordenar los polinomios según las potencias decrecientes de x y completar los términos que faltan escribiendo dichos términos con coeficiente nulo.

Ejemplo: Dados $P(x) = 2x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 4x + 5$ y $Q(x) = x^2 - 2x + 1$, el polinomio cociente entre $P(x)$ y $Q(x)$ es el polinomio $C(x)$ que se obtiene siguiendo el procedimiento que se muestra a continuación.

1) Se divide el primer término del dividendo $P(x)$ por el primer término del divisor $Q(x)$. $2x^4 : x^2 = 2x^2$ Se obtiene el primer término del cociente $C(x)$.	$\begin{array}{r\|l} 2x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 4x + 5 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2} & 2x^2 \end{array}$
2) El término de $C(x)$ se multiplica por el divisor. El producto se resta al dividendo (o se cambia de signo y se suma).	$\begin{array}{r\|l} 2x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 4x + 5 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2} -\left(2x^4 - 4x^3 + 2x^2\right) & 2x^2 \\ \cline{1-1} -3x^3 + 3x^2 + 4x + 5 & \end{array}$
3) Con $-3x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ como nuevo dividendo se repiten los pasos 1) y 2). Así se obtiene otro término del cociente. $-3x^3 : x^2 = -3x$	$\begin{array}{r\|l} 2x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 4x + 5 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2} -\left(2x^4 - 4x^3 + 2x^2\right) & 2x^2 - 3x \\ \cline{1-1} -3x^3 + 3x^2 + 4x + 5 & \\ -\left(-3x^3 + 6x^2 - 3x\right) & \\ \cline{1-1} -3x^2 + 7x + 5 & \end{array}$
4) El proceso continúa hasta que no se puedan obtener más términos del cociente. Cociente: $C(x) = 2x^2 - 3x - 3$ Resto: $R(x) = x + 8$	$\begin{array}{r\|l} 2x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 4x + 5 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2} -\left(2x^4 - 4x^3 + 2x^2\right) & 2x^2 - 3x - 3 \\ \cline{1-1} -3x^3 + 3x^2 + 4x + 5 & \\ -\left(-3x^3 + 6x^2 - 3x\right) & \\ \cline{1-1} -3x^2 + 7x + 5 & \\ -\left(-3x^2 + 6x - 3\right) & \\ \cline{1-1} x + 8 & \end{array}$

Es importante tener en cuenta que:

- La división $P(x):Q(x)$ puede efectuarse siempre que $grado\big(P(x)\big) \geq grado\big(Q(x)\big)$.
- $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$.
- El grado del resto debe ser menor que el grado del divisor, o bien $R(x) = 0$.

$$grado\big(R(x)\big) < grado\big(Q(x)\big)$$

- $grado\big(C(x)\big) = grado\big(P(x)\big) - grado\big(Q(x)\big)$.

5.5.7.- Regla de Ruffini

Cuando el divisor es un polinomio de la forma $x - a$, la división puede realizarse de un modo más sencillo, empleando un algoritmo conocido como *Regla de Ruffini*.

<u>*Ejemplo*</u>: Calcular $P(x):Q(x)$, siendo $P(x) = 3x^3 + 7x^2 - 3$ y $Q(x) = x + 3$.

Obsérvese que el polinomio divisor puede escribirse también como $Q(x) = x - (-3)$, adoptando la forma $x - a$ con $a = -3$.

Para realizar la división se emplea un cuadro.

En el primer renglón del cuadro se escriben los coeficientes del polinomio dividendo $P(x)$, que debe estar ordenado y completo.

$$P(x) = 3x^3 + 7x^2 + 0x - 3$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 7 & 0 & -3 \\ & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

En la primera columna sólo se escribe el valor de a, que en este caso es -3.

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 7 & 0 & -3 \\ -3 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

Los valores que figuran en el segundo y tercer renglón se obtienen realizando los cálculos auxiliares que se indican en el cuadro que figura a la derecha.

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 7 & 0 & -3 \\ & & + & + & + \\ -3 & & -9 & 6 & -18 \\ \hline & 3 \;\bullet(-3) & -2 \;\bullet(-3) & 6 \;\bullet(-3) & -21 \end{array}$$

El último número que figura en el tercer renglón es el resto $R = -21$.
Los números anteriores son los coeficientes del polinomio cociente $C(x) = 3x^2 - 2x + 6$, cuyo grado es una unidad menor que el grado del polinomio dividendo $P(x)$.
En este caso el grado del resto es igual a cero.

	3	7	0	-3
-3		-9	6	-18
	3	-2	6	-21

5.6.- Teorema del resto

Si se divide un polinomio $P(x)$ por otro de la forma $x - a$, se verifica que:

$$P(x) = (x - a) \cdot C(x) + R.$$

Si $x = a$, resulta:

$$\begin{aligned} P(a) &= (a - a) \cdot C(a) + R \\ &= 0 \cdot C(a) + R \\ &= R \end{aligned}$$

> El resto R que resulta de dividir un polinomio $P(x)$ por otro de la forma $x - a$, es igual al valor numérico de $P(x)$ en $x = a$, es decir $P(a) = R$.

Ejemplo: Para calcular el resto de la división entre $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 7x - 2$ y $Q(x) = x - 2$, basta con determinar el valor numérico de $P(x)$ en $x = 2$.

$$P(2) = 3 \cdot 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2 - 2 = 16$$

El resto es $R = 16$.

5.7.- Concepto de raíz de un polinomio

Un valor de x es raíz de $P(x)$, si el polinomio se anula para ese valor.

> $x = a$ es raíz de $P(x)$ si y sólo si $P(a) = 0$.

Ejemplo: $x = 3$ es raíz de $P(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$ porque

$$P(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 3 - 3 = 0$$

5.8.- Divisibilidad de polinomios

Si al realizar la división entre dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, el resto es nulo, se dice que $P(x)$ es divisible por $Q(x)$, o que $Q(x)$ divide a $P(x)$, o que $P(x)$ es múltiplo de $Q(x)$.

En ese caso $P(x)$ puede expresarse como:

$P(x) = Q(x) \cdot C(x)$

Ejercicio: Comprobar que $P(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$ es divisible por $x - 3$.

Observación

Teniendo en cuenta el *Teorema del resto* y los conceptos de *divisibilidad* y *raíz de un polinomio* se puede afirmar que las condiciones que se enuncian a continuación son equivalentes:

- a es raíz del polinomio $P(x)$.
- $P(a) = 0$.
- $P(x)$ es divisible por $x - a$.
- El resto que resulta de dividir $P(x)$ por $x - a$ es igual a cero.

5.9.- Factorización de polinomios

Del mismo modo en que se descompone un número entero en producto de sus factores primos, se puede descomponer un polinomio compuesto en producto de polinomios primos.

Un polinomio $P(x)$ de grado no nulo, es primo o irreducible cuando no puede ser expresado como producto de polinomios de grado positivo menor que $P(x)$.

Todo polinomio de grado uno es primo o irreducible.

Cuando un polinomio no es primo, es compuesto.

Factorizar un polinomio significa expresarlo como producto de polinomios primos o irreducibles.

Ejemplo:

Polinomio desarrollado: $S(x) = -3x^2 + 12x + 15$

Polinomio factorizado: $S(x) = -3 \cdot (x - 5) \cdot (x + 1)$

A continuación se presentan algunas técnicas que permiten expresar un polinomio como producto de factores.

5.9.1.- Factor común

Cuando en un polinomio $P(x)$, la variable x figura en todos los términos, se la extrae como factor común elevada al menor exponente. También se extrae como factor común el número que aparezca como factor en todos los términos.

Luego, se divide cada término del polinomio por el factor común.

Ejemplo: Sea $P(x) = 4x^2 + 20x^3 - 8x^4$.

El factor común que aparece en todos los términos es $4x^2$ y el polinomio dado puede expresarse como:

$P(x) = 4x^2 \cdot \left(1 + 5x - 2x^2\right)$

5.9.2.- Diferencia de cuadrados

Se recuerda que una diferencia de cuadrados puede expresarse como producto del siguiente modo:

$$x^2 - a^2 = (x+a)\cdot(x-a)$$

Ejemplos:

- $x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x+5)\cdot(x-5)$
- $x^4 - 36 = \left(x^2\right)^2 - 6^2 = \left(x^2+6\right)\cdot\left(x^2-6\right)$
- $x^2 - 6 = x^2 - \left(\sqrt{6}\right)^2 = \left(x+\sqrt{6}\right)\cdot\left(x-\sqrt{6}\right)$

5.9.3.- Trinomio cuadrado perfecto

La expresión factorizada de un trinomio cuadrado perfecto es el cuadrado de un binomio.

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)^2$$

Un trinomio cuadrado perfecto consta de tres términos que cumplen las siguientes condiciones:

- Dos de los términos son cuadrados perfectos.
- El término restante es el duplo del producto de las bases de los cuadrados perfectos. Si este término es negativo, entonces es negativo uno de los términos del binomio.

Ejemplo: $H(x) = x^2 - 10x + 25$ es un trinomio cuadrado perfecto porque:

- ✓ El primer término es el cuadrado de x.
- ✓ El tercer término es el cuadrado de 5.
- ✓ El segundo término es $-2\cdot 5\cdot x$.

El trinomio cuadrado perfecto queda factorizado como:

$$H(x) = x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$$

5.10.- Factorización de un polinomio por medio de sus raíces

El *Teorema Fundamental del Álgebra* permite afirmar que:

Un polinomio de grado n tiene exactamente n raíces, considerando las reales y las no reales.

Por lo tanto se puede decir que:

Un polinomio de grado n tiene como máximo n raíces reales.

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ con $a_n \neq 0$, y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son sus raíces, entonces $P(x)$ puede escribirse como $P(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$.

El polinomio ha quedado expresado como producto de polinomios primos, ha sido factorizado.

5.10.1.- Cálculo de las raíces de un polinomio

- **Polinomios de grado uno**

  Para determinar la única raíz de un polinomio de grado uno, es decir de un polinomio de la forma $P(x) = ax + b$, se plantea la ecuación $ax + b = 0$ y se obtiene $x = -\dfrac{b}{a}$.

- **Polinomios de grado dos**

  Para determinar las dos raíces x_1 y x_2 de un polinomio de grado dos, es decir de un polinomio de la forma $P(x) = ax^2 + bx + c$ se resuelve la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ como ya se vio en la Unidad 2.

- **Polinomios de grado mayor o igual que tres**

  La determinación de las raíces de polinomios se ha simplificado notablemente en la actualidad, gracias al uso de las computadoras y las calculadoras científicas.

  En este curso de trabajará con polinomios cuyas raíces puedan ser calculadas sin mayores dificultades.

  Es importante tener en cuenta que:

Una raíz entera de un polinomio de coeficientes enteros es un divisor de su término independiente.

Ejemplo: Determinar las raíces de $P(x) = 2x^3 - x^2 - 7x + 6$.

- Para hallar las posibles raíces enteras de $P(x)$ se debe considerar el conjunto de divisores del término independiente $6 : \{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6\}$.
- Se prueba cuáles de esos divisores son raíces de $P(x)$.

  $P(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - (-1)^2 - 7 \cdot (-1) + 6 = 10 \neq 0$, por lo tanto -1 no es raíz de $P(x)$.

  $P(1) = 2 \cdot 1^3 - 1^2 - 7 \cdot 1 + 6 = 0$, por lo tanto $x_1 = 1$ es raíz de $P(x)$.

- $P(x)$ es divisible por $x - 1$. Aplicando la Regla de Ruffini se obtiene:

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -1 & -7 & 6 \\ 1 & & 2 & 1 & -6 \\ \hline & 2 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

$C(x) = 2x^2 + x - 6$

$P(x) : (x - 1) = 2x^2 + x - 6$

$$P(x) = (x-1)\cdot\left(2x^2 + x - 6\right)$$

- Se determinan las raíces de $C(x) = 2x^2 + x - 6$.

$$x_2 = \frac{-1+\sqrt{1+48}}{4} = \frac{3}{2} \qquad\qquad x_3 = \frac{-1-\sqrt{1+48}}{4} = -2$$

Las raíces de $P(x)$ son: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{3}{2}$ y $x_3 = -2$.

El polinomio factorizado resulta: $P(x) = 2\cdot(x-1)\cdot\left(x - \frac{3}{2}\right)\cdot(x+2)$.

5.11.- Expresiones algebraicas fraccionarias

Reciben el nombre de *expresiones algebraicas fraccionarias* o simplemente *fracciones algebraicas* las expresiones de la forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios de una sola variable x y $Q(x) \neq 0$.

5.11.1.- Funciones racionales

Se llamarán funciones racionales a las funciones cuya fórmula es una fracción algebraica.

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

El dominio de una función racional es el conjunto de todos los valores de x que no anulan al denominador.

Cuado se trabaja con funciones racionales es importante tener en cuenta su dominio.

Ejemplos:

- El dominio de la función g definida por $g(x) = \frac{x+3}{x-2}$ es: $dom(g) = R - \{2\}$
- El dominio de la función h definida $h(x) = \frac{x^2-9}{(x-5)\cdot(x+2)}$ es: $dom(h) = R - \{-2, 5\}$

5.11.2.- Simplificación de fracciones algebraicas

Es posible simplificarlas cuando existen factores comunes en el numerador y en el denominador, de lo contrario la expresión es irreducible.

Ejemplo: Dada la expresión $\frac{x^2-9}{x^3+x^2-9x-9}$, se factoriza numerador y denominador, resultando:

$$\frac{x^2-9}{x^3+x^2-9x-9}=\frac{(x+3)\cdot(x-3)}{(x+1)\cdot(x+3)\cdot(x-3)}$$

Simplificando los factores comunes, se obtiene:

$$\frac{x^2-9}{x^3+x^2-9x-9}=\frac{(x+3)\cdot(x-3)}{(x+1)\cdot(x+3)\cdot(x-3)}=\frac{1}{x+1} \quad \text{si } x\neq 3 \text{ y } x\neq -3$$

Las expresiones anteriores son equivalentes, pero no debe olvidarse que el dominio de la función racional es el que quedó determinado a partir de la expresión original .

La simplificación es válida siempre que $x\neq 3$ y $x\neq -3$.

5.12.- Operaciones con fracciones algebraicas

5.12.1.- Suma y resta de fracciones.

Con igual denominador

$$\frac{P(x)}{Q(x)}+\frac{S(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)+S(x)}{Q(x)} \qquad \frac{P(x)}{Q(x)}-\frac{S(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)-S(x)}{Q(x)}$$

Ejemplo:

$$\frac{2x+1}{x+3}-\frac{x+5}{x+3}=\frac{(2x+1)-(x+5)}{x+3}=\frac{2x+1-x-5}{x+3}=\frac{x-4}{x+3}$$

Con distinto denominador

Cuando las expresiones que se quieren sumar (o restar) tiene distinto denominador, es necesario calcular el denominador común.

Ejemplo:

$$\frac{2}{x^2-4}+\frac{x+5}{x^2+4x+4}$$

- Se factorizan los denominadores.

  $x^2-4=(x+2)\cdot(x-2)$

  $x^2+4x+4=(x+2)^2$

- Se calcula el *denominador común* como el *múltiplo común menor* de los denominadores. Para ello, se multiplican los factores comunes y no comunes con el mayor exponente con el que figuren.

  El denominador común en el ejemplo dado es $(x+2)^2\cdot(x-2)$

- Se divide el denominador común encontrado por el denominador de cada término y se multiplica este cociente por el numerador correspondiente.

  $$\frac{2}{x^2-4}+\frac{x+5}{x^2+4x+4}=\frac{2}{(x+2)\cdot(x-2)}+\frac{x+5}{(x+2)^2}=\frac{2\cdot(x+2)+(x+5)\cdot(x-2)}{(x+2)^2\cdot(x-2)}$$

- Operando en el numerador, queda:

$$\frac{2x+4+x^2-2x+5x-10}{(x+2)^2\cdot(x-2)}=\frac{x^2+5x-6}{(x+2)^2\cdot(x-2)}$$

- Se factoriza el numerador, y si corresponde se simplifica la fracción.

$$\frac{x^2+5x-6}{(x+2)^2\cdot(x-2)}=\frac{(x-1)\cdot(x+6)}{(x+2)^2\cdot(x-2)}$$

5.12.2.- Producto de fracciones algebraicas

El producto de dos fracciones algebraicas $\frac{P(x)}{Q(x)}$ y $\frac{S(x)}{T(x)}$ se realiza del siguiente modo:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\cdot\frac{S(x)}{T(x)}=\frac{P(x)\cdot S(x)}{Q(x)\cdot T(x)}$$

Ejemplo:

$$\frac{x}{3x+3}\cdot\frac{x^2-1}{x^3+2x^2}=\frac{x\cdot\left(x^2-1\right)}{(3x+3)\cdot\left(x^3+2x^2\right)}$$

Se factoriza numerador y denominador y se simplifica si es posible.

$$\frac{x}{3x+3}\cdot\frac{x^2-1}{x^3+2x^2}=\frac{x\cdot\left(x^2-1\right)}{(3x+3)\cdot\left(x^3+2x^2\right)}=\frac{x\cdot(x+1)\cdot(x-1)}{3\cdot(x+1)\cdot x^2\cdot(x+2)}=\frac{x-1}{3x\cdot(x+2)}\quad si\ x\neq-1$$

5.12.3.- División de fracciones algebraicas

Se llama inversa de una expresión algebraica fraccionaria $\frac{S(x)}{T(x)}$ a la expresión $\frac{T(x)}{S(x)}$, si $S(x)$ es no nulo.

Para realizar la división $\frac{P(x)}{Q(x)}:\frac{S(x)}{T(x)}$ se multiplica la primera fracción por la inversa de la segunda.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}:\frac{S(x)}{T(x)}=\frac{P(x)}{Q(x)}\cdot\frac{T(x)}{S(x)}$$

Ejemplo:

$$\frac{5x+10}{x^2-1}:\frac{3x+6}{x+1}=\frac{5x+10}{x^2-1}\cdot\frac{x+1}{3x+6}=\frac{5(x+2)\cdot(x+1)}{(x+1)\cdot(x-1)\cdot3(x+2)}=\frac{5}{3(x-1)}\quad si\ x\neq-1\ y\ x\neq-2$$

5.13.- Ecuaciones que involucran fracciones algebraicas

A continuación se mostrará a través de un ejemplo cómo se resuelve una ecuación que involucra fracciones algebraicas.

Ejemplo: Encontrar los valores de x que satisfacen la siguiente ecuación.

$$\frac{3x}{x-1}-\frac{2x^2}{x+1}=\frac{5x}{x^2-1}$$

Se observa en este caso, que la incógnita x no puede tomar los valores 1 y -1, dado que dichos valores anulan los denominadores.

La siguiente ecuación es equivalente a la dada.

$$\frac{3x}{x-1}-\frac{2x^2}{x+1}-\frac{5x}{x^2-1}=0$$

Se calcula el denominador común y se obtiene:

$$\frac{3x\cdot(x+1)-2x^2\cdot(x-1)-5x}{x^2-1}=0$$

Operando en el numerador queda:

$$\frac{3x^2+3x-2x^3+2x^2-5x}{x^2-1}=0$$

$$\frac{-2x^3+5x^2-2x}{x^2-1}=0$$

Las raíces del polinomio $-2x^3+5x^2-2x$ que figura en el numerador son soluciones para la ecuación dada.

Ellas son $x_1=0$, $x_2=\frac{1}{2}$ y $x_3=2$.

Como puede observarse no es necesario descartar ninguna de las soluciones obtenidas, ya que son distintas de 1 y -1, valores de la incógnita que al comenzar el ejemplo dijimos que anulan el denominador.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE Nº 5

1.- Calcular $A(x)-2B(x)$, siendo $A(x)=2x^3+4x^4-9x^2+8$ y $B(x)=-3x^3+x^2-2x$.

2.- Dados: $P(x)=4x^3-5x^2+6x-4$, $Q(x)=4x^2-x+5$ y $T(x)=x^2-3$

Calcular:

a. $3P(x)+Q(x)$

b. $P(x)-Q(x)\cdot T(x)$

3.- Sean $A(x)=-3x-4+2x^2$ y $B(x)=2x-1$.

Completar el cuadro que sigue con el resultado de las operaciones indicadas.

$B(x)\cdot A(x)=$
$(B(x))^2=$

4.- Obtener el cubo del siguiente binomio: $2-3y$.

5.- En el polinomio $A(x)=x^5-2x^4+x^3-3x^2+kx+3$ ¿Cuánto vale k, si $A(-1)=-2$?

6.- Efectuar las siguientes divisiones, indicando para cada una de ellas el cociente y el resto. Cuando corresponda emplear la Regla de Ruffini.

a. $\left(x^3-x^2+2x+3\right)\div\left(x^2-1\right)$

b. $\left(-8x^5-16x^2+8x\right)\div\left(2x^3-x^2+1\right)$

c. $\left(x^4+x^2+2\right)\div\left(x+2\right)$

d. $\left(-3x+2x^4-5+x^3\right)\div\left(x-2\right)$

e. $\left(x^5-10x-7\right)\div\left(x-3\right)$

f. $\left(x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}\right)\div\left(x-1\right)$

g. $\left(-5y^2 + 2y^3 - 1 + 2y\right) \div \left(y + 3\right)$

7.- En una división de polinomios el cociente es $C(x) = 4x^2 - x + 5$ y el resto es $R(x) = 3x - 7$. ¿Cuál es el dividendo, si el divisor es: $d(x) = x^3 + x - 1$?

8.- Dado el polinomio $Q(x) = 2x^3 + 4x^2 - x - 5$, calcular $Q(1)$. ¿Cuál es el resto de dividir $Q(x)$ por $\left(x - 1\right)$?

9.- Dado $P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 10x + b$, determinar el valor de b, para que el número real -2 sea raíz de $P(x)$.

10.- ¿Cuánto debe valer k para que el polinomio $Q(x) = -2x^4 + 3kx - 1$ sea divisible por $(x - 2)$

11.- Sin realizar la división que se da a continuación, determinar el resto de:

$$\frac{x^{101} + x^{100} - x^{99} + x^{98}}{x + 1}$$

12.- Completar:

a. $-9x + 3x^3 + 6 = (x + 2) \cdot (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$

b. $(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) \div (x + 1)^2 = x - 3$

13.- Sea $Q(x) = 2x^3 - 4x^2 - 22x + 24$

a. Se sabe que $Q(x)$ es divisible por uno de los siguientes polinomios. Indicar por cuál. Justificar.

$\left(x - 2\right)$ $\left(x + 3\right)$ $\left(x + 1\right)$

b. Encontrar todas las raíces de $Q(x)$

Raíces de $Q(x)$: …………………

14.-

a. Si $T(x) \cdot (x + 3) = 3x^3 + 12x^2 + 3x - 18$, determinar $T(x)$.

b. Calcular las raíces de $Q(x) = 3x^3 + 12x^2 + 3x - 18$

c. Expresar el polinomio $Q(x)$ factorizado

15.- Se sabe que el polinomio $P(x)$ es divisible por $(x-2)$ y el polinomio cociente que resulta de dividir $P(x)$ por $(x-2)$ es $C(x)=2x^2-2x-12$

a. Calcular $P(x)$

b. Determinar las raíces de $P(x)$

c. Expresar el polinomio $P(x)$ factorizado

16.- Construir un polinomio que admita las raíces: $x_1=2+\sqrt{5}$, $x_2=2-\sqrt{5}$ y $x_3=-1$

17.- Determinar un polinomio de grado 3, que tenga como raíces a $x_1=1$, a $x_2=2$ y tal que $P(0)=10$.

18.- Factorizar las siguientes expresiones:

a. $x^2-13x+40$

b. $4x^2+24x+36$

c. x^4-625

d. $3x^3-6x^2-9x$

19.- Factorizar y simplificar las siguientes expresiones:

a. $\dfrac{x^3-x^2-2x}{x^2-4}\cdot\dfrac{(x+2)^2}{3x^2+3x}$

b. $\dfrac{3x^3+12x^2+3x-18}{x^2+2x-3}\cdot\dfrac{5x^2-10x}{x^2-4}$

c. $\dfrac{2x^3+2x^2-12x}{4x^3-8x^2}\cdot\dfrac{2x-6}{x^2-9}$

d. $\dfrac{3x^2-9x}{x^2-9}\cdot\dfrac{2x^3-4x^2-22x+24}{x^2-4x}$

e. $\dfrac{3x+6}{x^2-1}\cdot\dfrac{x^2-5x-6}{5x-30}$

20.- Operar y simplificar.

a. $\dfrac{1}{x+2}\div\dfrac{1}{3x^2-12}$

b. $\dfrac{x+3}{x^2-4} \div \dfrac{x^2-x-12}{(x-2)^2}$

c. $\dfrac{x^3+x}{x^2-2x+1} \div \dfrac{4x^2+4}{x^2+x-2}$

d. $\dfrac{4}{a} - \dfrac{3}{3a+2} - \dfrac{2}{a(3a+2)}$

21.- Indicar verdadero(V) o falso(F). Justificar la respuesta.

a. El binomio $x+1$ es un divisor de x^3+6x^2+x+30 .

b. $x^3-\dfrac{1}{6}$ es divisible por $x+\dfrac{1}{2}$.

c. $\dfrac{1-3a^{-1}}{1-2a^{-1}-3a^{-2}} = \dfrac{a}{a+1}$ si $a \neq 3$

d. $\dfrac{6+3y}{y^2+12y+36} - \dfrac{y-6}{(y+6)^2} = \dfrac{2}{y+6}$

e. $\forall\ b \neq -1$ vale $\dfrac{b^2-2}{b+1} = b-1-\dfrac{1}{b+1}$

f. Si $x \in R - \{-3,3\}$ se verifica $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9} = \dfrac{-5x+2}{-2}$

22.- Resolver las siguientes ecuaciones:

a. $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{x^2-5}{x^2-1}$

b. $\dfrac{2}{x-2} - \dfrac{3}{x^2-2x} = 1$

c. $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{x}{x^2-1} = 1$

d. $\dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{-12}{4x-4} - \dfrac{3x^2+6x+3}{3x^2-3}$

e. $\dfrac{1}{x^3+4x^2+4x}-\dfrac{x-1}{x+2}=\dfrac{1}{x^2+4x+4}$