SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

A. INTRODUCCIÓN TEÓRICA

Sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineales está formado por ecuaciones de primer grado en todas las incógnitas. Todas esas ecuaciones han de verificarse a la vez.

Un sistema formado por dos ecuaciones y dos incógnitas, se puede escribir como sigue:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Cada una de estas ecuaciones es una recta. La solución del sistema es el punto en el que se cortan las dos rectas. Puede pasar que las rectas no se corten. En ese caso el sistema no tiene solución

Un sistema lineal de tres ecuaciones y tres incógnitas se puede escribir como sigue:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{33}x + a_{33}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Cada una de estas ecuaciones es un plano. La solución del sistema es el punto en el que se cortan los dos planos. El sistema sólo tiene solución cuando los tres planos intersectan entre sí.

Métodos de resolución

a) Método de sustitución.

En una de las dos ecuaciones del sistema se despeja una incógnita y luego se sustituye esa expresión en la otra ecuación.

Ejemplo:

Resuelve: $\begin{cases} x+y=2 \\ 3x-y=-5 \end{cases}$

Por conveniencia, despejamos x de la ecuación primera. Luego sustituimos ese valor en la otra ecuación y operamos.

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 3x-y=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2-y \\ 3x-y=-5 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$3(2-y)-y=-5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6-3y-y=-5 \Rightarrow -4y=-11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y=\frac{11}{4}}$$

Ya hemos hallado y. Para conseguir x llevamos el valor de y a cualquiera de las dos ecuaciones.

$$\begin{cases} x=2-y \Rightarrow x=2-\dfrac{11}{4} \Rightarrow \boxed{x=-\dfrac{3}{4}} \\ 3x-y=-5 \end{cases}$$

La solución obtenida puede expresarse así:

$$(x,y)=\left(-\frac{3}{4},\frac{11}{4}\right)$$

b) Método de igualación.

En cada una de las dos ecuaciones del sistema se despeja **la misma incógnita**, igualando luego ambas expresiones. De ahí se obtienen las soluciones buscadas.

Ejemplo:

Resuelve: $\begin{cases} x+y=2 \\ 3x-y=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2-y \\ x=\dfrac{-5+y}{3} \end{cases} \Rightarrow$

$$2-y=\frac{-5+y}{3} \Rightarrow \frac{(2-y)3}{3}=\frac{-5+y}{3} \Rightarrow$$

$$6-3y=-5+y \Rightarrow -4y=-11 \Rightarrow \boxed{y=\frac{11}{4}}$$

Calculemos x :

$$y=\frac{11}{4} \Rightarrow x=2-\frac{11}{4} \Rightarrow \boxed{x=-\frac{3}{11}}$$

Conclusión: $(x,y)=\left(-\frac{3}{4},\frac{11}{4}\right)$

c) Método de reducción.

El método de reducción implica emplear algo de ingenio. Consiste en manipular de forma conveniente a las ecuaciones, multiplicándolas por números convenientes, con el fin de que al sumarlas se cancele alguna incógnita y obtener así la otra de una forma sencilla.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 2x+y=2 \\ 3x+5y=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} -10x-5y=-10 \\ 3x+5y=-5 \\ \hline -7x=-15 \Rightarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{x=\frac{15}{7}}$$

Lo que hemos hecho ha sido multiplicar la ecuación superior por –5. De este modo al sumar ambas ecuaciones se pierde la y y la x se obtiene casi de forma inmediata.

$$2x+y=2 \Rightarrow 2\left(\frac{15}{7}\right)+y=2 \Rightarrow y=2-\frac{30}{7} \Rightarrow \boxed{y=-\frac{16}{7}}$$

Conclusión:

$$(x,y)=\left(\frac{15}{7},-\frac{16}{7}\right)$$

d) Método de Gauss.

Este método es utilizado para resolver sistemas de tres ecuaciones y más. Vamos a analizar el caso en el que tenemos un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{13}y = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}y = b_3 \end{cases}$$

El juego consiste en eliminar incógnitas mediante la suma o resta de ecuaciones. Mediante manipulaciones convenientes vamos dando pasos para que el sistema anterior quede del siguiente modo:

$$\Rightarrow \begin{cases} a'_{11}x + a'_{12}y + a'_{13}y = b'_1 \\ \quad + a'_{22}y + a'_{23}y = b'_2 \Rightarrow \\ \quad + a'_{32}y + a'_{33}y = b'_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a''_{11}x + a''_{12}y + a''_{13}y = b''_1 \\ \quad + a''_{22}y + a''_{23}y = b''_2 \Rightarrow \\ \qquad + a''_{33}y = b''_3 \end{cases}$$

Los coeficientes a'_{ij} y a''_{ij} son los coeficientes que se obtienen al multiplicar la ecuación por un número y sumarla o restarla con otra ecuación del sistema.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 6x + 2y + 3y = 11 \\ 5x + 4y - 2y = 7 \\ 3x - 2y + 5y = 6 \end{cases}$$

Queremos eliminar el 5x de la segunda ecuación. Para ello multiplicamos la 1ª ecuación por –5 y la sumamos a la 2ª ecuación después de haber multiplicado ésta por 6:

$$\begin{cases} 6x + 2y + 3y = 11 \\ 0x + 14y - 27y = -13 \\ 3x - 2y + 5y = 6 \end{cases}$$

Sumamos la 1ª ecuación con la 3ª multiplicada por –2:

$$\begin{cases} 6x + 2y + 3y = 11 \\ 0x + 14y - 27y = -13 \\ 0x + 6y - 7y = -1 \end{cases}$$

Multiplicamos la 2ª ecuación por 3 y la sumamos a la 3º ecuación multiplicada por –7:

$$\begin{cases} 6x+2y+3z=11 \\ 0x+14y-27z=-13 \\ 0x-0y-32z=-32 \end{cases}$$

Ya hemos hecho todo el trabajo. Ahora basta con ir recopilando los valores de las tres incógnitas.

De la 3ª ecuación:

$$-32z=-32 \Rightarrow \boxed{z=-1}$$

De la 2ª ecuación:

$$14y-27(-1)=-13 \Rightarrow \boxed{y=1}$$

De la 1ª ecuación:

$$6x+2\cdot 1+3(-1)=11 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

Conclusión:

$$(x,y,z)=(1,1,1)$$

e) Método de Cramer.

Es un método fácil. La única pega a tu nivel es que necesitas conocer un poquito sobre unos números llamados *determinantes*. Pero si tienes espíritu explorador ello no va a ser un obstáculo para ti.

Un determinante es un conjunto de números dispuestos en filas y en columnas. El número de filas y columnas ha de ser el mismo. Ejemplos de determinantes:

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}, \ldots$$

Estas disposiciones de filas y columnas representan cantidades numéricas.

Así, se tiene que:

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 17 .$$

A este resultado se llega como sigue:

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 - 5 \cdot (-1) = 17 .$$

Otro ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 13$$

Sencillo, ¿no? Decir que para un determinante de tres filas y tres columnas el procedimiento es un poco más complejo. Más adelante detallaré cómo se resuelve este tipo de determinantes.

Resolvamos dos sistemas ya tratados antes mediante otro método: el Método de Cramer.

Resolución de $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x - y = -5 \end{cases}$ (Método de Cramer)

Los coeficientes del sistema los escribimos del siguiente modo:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -5 \end{array}\right).$$

Ahora hallamos el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 = -4$. Bien. Fíjate como se deducen las incógnitas x e y.

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -5 \end{array}\right) \\ \text{(a)} \quad \text{(b)} \quad \text{(c)} \end{array}$$

$$x=\frac{\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{(c)} & \text{(b)} \end{array} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} \end{array}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{-2+5}{-4}\Rightarrow \boxed{x=-\frac{3}{4}}$$

$$y=\frac{\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{(a)} & \text{(c)} \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} \end{array}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{-5-6}{-4}\Rightarrow \boxed{y=\frac{11}{4}}$$

Conclusión:

$$(x,y)=\left(-\frac{3}{4},\frac{11}{4}\right)$$

Resolución de $\begin{cases} 2x+y=2 \\ 3x+5y=-5 \end{cases}$. (Método de Cramer)

Los coeficientes del sistema los escribimos del siguiente modo:

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & -5 \end{array}\right). \\ \begin{array}{ccc} \text{(a)} & \text{(b)} & \text{(c)} \end{array} \end{array}$$

Ahora hallamos el determinante $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$:

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=2\cdot 5-3\cdot 1=7$. Bien. Fíjate como se deducen las incógnitas x e y.

$$x=\frac{\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{(c)} & \text{(b)} \end{array} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} \end{array}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}}=\frac{10+5}{7}\Rightarrow \boxed{x=\frac{15}{7}}$$

$$y=\frac{\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{(a)} & \text{(c)} \end{array} \\ \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} \end{array}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}}=\frac{-10-6}{7}\Rightarrow \boxed{x=-\frac{16}{7}}$$

Conclusión:

$$(x,y)=\left(\frac{15}{7},-\frac{16}{7}\right)$$

B. Ejercicios resueltos

1. Resuelve: $\begin{cases}4x+3y=1\\3x-2y=-5\end{cases}$

Solución:

Despejamos la x de la 1ª ecuación (podríamos haber elegido también la 2ª ecuación) y lo obtenido lo llevamos a la ecuación 2ª:

$$\begin{cases}4x+3y=1\\3x-2y=-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1-3y}{4}\\3x-2y=-5\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$3\left(\frac{1-3y}{4}\right)-2y=-5\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3-9y-8y=-20\Rightarrow -7y=-23\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y=\frac{23}{17}}$$

Llevamos el valor de y a la 1ª ecuación:

$$x=\frac{1-3y}{4}\Rightarrow x=\frac{1-3\left(\frac{23}{17}\right)}{4}=\frac{\frac{17-69}{17}}{4}==\frac{-52}{17}:4\Rightarrow\boxed{x=-\frac{13}{17}}$$

Solución:

$$(x,y)=\left(-\frac{13}{17},\frac{23}{17}\right)$$

2. Resuelve: $\begin{cases}-\dfrac{4x}{3}+5y=-\dfrac{1}{2}\\\dfrac{2x-3y}{4}=6\end{cases}$

Solución:

Quitamos los denominadores:

$$\begin{cases} -\dfrac{4x}{3}+\dfrac{30y}{3}=-\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{2x-3y}{4}=\dfrac{24}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x+30y=-3 \\ 2x-3y=24 \end{cases}$$

Ahora procedemos de la manera acostumbrada:

Despejamos la x de la 2ª ecuación:

$$\begin{cases} -4x+30y=-3 \\ 2x-3y=24 \Rightarrow x=\dfrac{3y+24}{2} \end{cases}$$

Llevamos este resultado a la 1ª ecuación:

$$-4x+30y=-3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4\left(\frac{3y+24}{2}\right)+30y=-3 \Rightarrow -4\left(\frac{3y+24}{2}\right)+30y=-3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 24y=45 \Rightarrow \boxed{y=\frac{15}{8}}$$

Llevamos el resultado a la 2ª ecuación:

$$x=\frac{3y+24}{2} \Rightarrow x=\frac{3\left(\frac{15}{8}\right)+24}{2} \Rightarrow \boxed{x=\frac{237}{16}}$$

Solución:

$$(x,y)=\left(\frac{237}{16},\frac{15}{8}\right)$$

Método de igualación:

3. Resuelve: $\begin{cases} 4x+3y=1 \\ 3x-2y=-5 \end{cases}$

Solución:

Despejo la misma incógnita de las dos ecuaciones, por ejemplo, la x:

$$\begin{cases} 4x+3y=1 \\ 3x-2y=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1-3y}{4} \\ x=\dfrac{-5+2y}{3} \end{cases}$$

Ahora igualo ambas expresiones:

$$\frac{1-3y}{4}=\frac{-5+2y}{3} \Rightarrow 3-9y=-20+8y \Rightarrow -17y=-23 \Rightarrow y=\frac{23}{17}$$

Por último, llevo este resultado a la 1ª ecuación:

$$x=\frac{1-3y}{4} \Rightarrow x=\frac{1-3\left(\frac{23}{17}\right)}{4} \Rightarrow x=\frac{-52}{17}:4 \Rightarrow \boxed{x=-\frac{13}{17}}$$

Solución:
$$(x,y)=\left(-\frac{13}{17},\frac{23}{17}\right)$$

4. Resuelve: $\begin{cases} -5x+2y=-3 \\ \dfrac{3x-y}{2}=1 \end{cases}$

Solución:

Despejo la misma incógnita en las dos ecuaciones. En este caso voy a despejar la y:

$$\begin{cases} -5x+2y=-3 \\ \dfrac{3x-y}{2}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{-3+5x}{2} \\ y=3x-2 \end{cases}$$

Ahora igualamos ambas expresiones y despejamos x:

$$\frac{-3+5x}{2}=3x-2 \Rightarrow$$
$$-3+5x=6x-4 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

Por último, llevamos este resultado a la 2ª ecuación:

$$y = 3x - 2 \Rightarrow y = 3 \cdot 1 - 2 \Rightarrow \boxed{y = 1}$$

Conclusión:

$(x, y) = (1, 1)$

Método de reducción:

5. Resuelve: $\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 3x - 2y = -5 \end{cases}$

<u>Solución:</u>

Manipulando convenientemente las ecuaciones conseguiremos que una de las dos incógnitas se cancele y obtengamos así los valores buscados.

multiplico todo por 2

$$\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ \\ 3x - 2y = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x + 6y = 2 \\ \\ 9x - 6y = -15 \end{cases} \Rightarrow$$

multiplico todo por 3

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 8x + 6y = 2 \\ 9x - 6y = -15 \\ \hline 17x \qquad = -13 \Rightarrow \boxed{x = -\dfrac{13}{17}} \end{array}$$

Obtengo y sustituyendo x en la 1ª ecuación:

$$4x + 3y = 1 \Rightarrow 4\left(-\frac{13}{17}\right) + 3y = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\left(-\frac{13}{17}\right) + 3y = 1 \Rightarrow y = \frac{1 + \frac{52}{17}}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{23}{17}}$$

Conclusión:

$$(x,y)=\left(-\frac{13}{17},\frac{23}{17}\right)$$

6. Resuelve: $\begin{cases} 2x+7y=2 \\ 5x-2y=-1 \end{cases}$

<u>Solución:</u>

Quiero que la *x* se cancele.

multiplico por −5

$$\begin{cases} 2x+7y=2 \\ \\ 5x-2y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -10x-35y=-10 \\ \\ 10x-4y=-2 \end{cases} \Rightarrow$$

multiplico por 2

Conclusión:

$$(x,y)=\left(-\frac{1}{13},\frac{4}{13}\right)$$

7. $\left.\begin{aligned} \frac{2}{3}x-\frac{5}{2}y=-17 \\ \frac{3}{4}x+\frac{2}{5}y=13 \end{aligned}\right\}$

<u>Solución:</u>

Vamos a usar el método de reducción:

$$\left.\begin{aligned} \frac{2}{3}x-\frac{5}{2}y=-17 \\ \frac{3}{4}x+\frac{2}{5}y=13 \end{aligned}\right\} \underset{\frac{5}{2}e_2}{\overset{\frac{2}{5}e_2}{\Rightarrow}} \left.\begin{aligned} \frac{4}{15}x-y=-\frac{34}{5} \\ \frac{15}{8}x+y=\frac{65}{2} \end{aligned}\right\} \overset{e´_1+e´_2}{\Rightarrow} \frac{257}{120}x=\frac{257}{10} \Rightarrow x=12$$

Ahora sustituimos en e_1 el valor de **x** para obtener la **y**:

$$\frac{2}{3}\cdot 12-\frac{5}{2}y=-17 \Rightarrow 8-\frac{5}{2}y=-17 \Rightarrow y=10$$

Conclusión: $\boxed{(x,y)=(12,10)}$

8. $\left.\begin{array}{l} x+2y-5z=3 \\ 2x-3y+4z=-1 \\ 3x+4y-4z=8 \end{array}\right\}$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y-5z=3 \\ 2x-3y+4z=-1 \\ 3x+4y-4z=8 \end{array}\right\} \underset{-3e_1+e_3}{\overset{-2e_1+e_2}{\Rightarrow}} \left.\begin{array}{l} x+2y-5z=3 \\ -7y+14z=-7 \\ -2y+11z=-1 \end{array}\right\} \overset{-2e'_2+7e'_3}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{r} x+2y-5z=3 \\ -7y+14z=-7 \\ 49z=7 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y-5z=3 \\ -7y+14z=-7 \\ z=\dfrac{1}{7} \end{array}\right\}$$

El valor de z lo llevamos a la segunda ecuación para obtener **y** y finalmente los valores de **z** y **y** los llevamos a la primera ecuación para obtener **x**:

Obtención de y:

$$-7y+14\cdot\frac{1}{7}=-7 \Rightarrow y=\frac{9}{7}$$

Obtención de x:

$$x+2\cdot\frac{9}{7}-5\cdot\frac{1}{7}=3 \Rightarrow x=\frac{8}{7}$$

Conclusión:

$$\boxed{(x,y,z)=\left(\frac{8}{7},\frac{9}{7},\frac{1}{7}\right)}$$

9. $\left.\begin{array}{l} 2x-(1-y)=\dfrac{3}{2} \\ 3-x=\dfrac{3y}{2} \end{array}\right\}$

Solución:

Reordenemos términos y simplifiquemos:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-(1-y)=\dfrac{3}{2} \\ 3-x=\dfrac{3y}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y=\dfrac{5}{2} \\ -2x-3y=-6 \end{array}\right\}$$

Ahora aplicamos el método de eliminación:

$$\begin{array}{r} 2x+y=\dfrac{5}{2} \\ \underline{-2x-3y=-6} \\ -2y=\dfrac{-7}{2} \Rightarrow \boxed{y=\dfrac{7}{4}} \end{array}$$

Por último, llevamos el valor de y a la primera ecuación, de donde obtendremos x:

$$2x+y=\frac{5}{2} \Rightarrow 2x+\frac{7}{2}=\frac{5}{2} \Rightarrow \boxed{x=\frac{3}{8}}$$

Conclusión:

$$(x,y)=\left(\frac{3}{8},\frac{7}{4}\right)$$

10. $$\left.\begin{array}{l} 2x=\dfrac{x-y}{3} \\ \dfrac{2x-4}{2}-4=\dfrac{1-2y}{2} \end{array}\right\}$$

<u>Solución:</u>

Quitamos denominadores y simplificamos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 6x=x-y \\ 2x-4-8=1-2y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 5x=-y \\ 2x+2y=13 \end{array}\right\}$$

Despejamos y de la primera ecuación del sistema y lo llevamos a la segunda ecuación. de ahí obtendremos x:

$$y=-5x \Rightarrow 2x+2\cdot(-5x)=13 \Rightarrow \boxed{x=-\frac{13}{8}}$$

Por último, llevamos el valor de x a la primera ecuación, de donde obtendremos el valor de y:

$$5x=-y\Rightarrow 5\left(-\frac{13}{8}\right)=-y\Rightarrow \boxed{y=\frac{65}{8}}$$

Conclusión:

$$(x,y)=\left(-\frac{13}{8},\frac{65}{8}\right)$$

11. $\left.\begin{array}{l} 2x+y+z=1 \\ 3x-2=y+z \\ x=3z-4y \end{array}\right\}$

Solución:

Primero ordenamos el sistema y luego hacemos las manipulaciones pertinentes:

$$\left.\begin{array}{r} x+4y-3z=0 \\ 2x+y+z=1 \\ 3x-y-z=2 \end{array}\right\} \underset{-3e_1+e_3}{\overset{-2e_1+e_2}{\Rightarrow}} \left.\begin{array}{r} x+4y-3z=0 \\ -7y+7z=1 \\ -13y+8z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+4y-3z=0 \\ -y+z=\frac{1}{7} \\ -13y+8z=2 \end{array}\right\} \overset{-8e_2+e_3}{\Rightarrow}$$

$$\left.\begin{array}{r} x+4y-3z=0 \\ -y+z=\frac{1}{7} \\ -5y=\frac{6}{7} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{(x,y,z)=\left(\frac{3}{5},-\frac{6}{35},-\frac{1}{35}\right)}$$

12. $\left.\begin{array}{l} 2x-3y+4x=1 \\ 3x+2y-z=2 \\ 4x+y+3z=4 \end{array}\right\}$

Solución:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-3y+4x=1 \\ 3x+2y-z=2 \\ 4x+y+3z=4 \end{array}\right\} \overset{\frac{1}{2}e_1}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{r} x-\frac{3}{2}y+2x=\frac{1}{2} \\ 3x+2y-z=2 \\ 4x+y+3z=4 \end{array}\right\} \underset{-4e_1+e_3}{\overset{-3e_1+e_2}{\Rightarrow}} \left.\begin{array}{r} x-\frac{3}{2}y+2x=\frac{1}{2} \\ \frac{13}{2}y-7z=\frac{1}{2} \\ 7y-5z=2 \end{array}\right\} \overset{\frac{2}{13}e_1}{\Rightarrow}$$

$$\overset{\frac{2}{13}e_1}{\Rightarrow}\left.\begin{array}{r} x-\dfrac{3}{2}y+2z=\dfrac{1}{2}\\ y-\dfrac{14}{13}z=\dfrac{1}{13}\\ 7y-5z=2 \end{array}\right\} \overset{-7e_2+e_3}{\Rightarrow}\left.\begin{array}{r} x-\dfrac{3}{2}y+2z=\dfrac{1}{2}\\ y-\dfrac{14}{13}z=\dfrac{1}{13}\\ \dfrac{33}{13}z=\dfrac{19}{13} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{23}{33}-2\cdot\dfrac{19}{33}\\ y=\dfrac{1}{13}+\dfrac{14}{13}=\dfrac{23}{33}\\ z=\dfrac{19}{33} \end{array}\right.$$

La solución final es: $\boxed{(x,y,z)=\left(\dfrac{13}{33},\dfrac{23}{33},\dfrac{19}{33}\right)}$

***