# Polinomios:

**Definición**: Se llama polinomio en "$x$" de grado "$n$" a una expresión del tipo

$$P_{(x)} = a_0\, x^n + a_1\, x^{n-1} + \ldots + a_n$$

Donde $n \in$ N (número natural) ; $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son coeficientes reales (pertenecientes al conjunto de los números reales).

**Grado de un polinomio**: es el exponente del término que posee el valor de potencia más alto.

Ejemplo:
$P_{(x)} = x^2 + 3x - 4$ Polinomio de grado 2

$R_{(x)} = 3$ Polinomio de grado 0

$Q_{(x)} = x^5 + 7\, x^3 - 2$ Polinomio de grado 5

$M_{(x)} = 0$ Polinomio nulo.

**Valor numérico de un polinomio**: es el número que se obtiene al sustituir la $x$ por un valor dado y efectuar, luego, las operaciones indicadas.

Ejemplo: sea $P_{(x)} = x^2 + 3x - 4$ hallar $P_{(2)} \Rightarrow P_{(2)} = 2^2 + 3.2 - 4 \Rightarrow P_{(2)} = 4 + 6 - 4 \Rightarrow P_{(2)} = 6$

**Polinomio opuesto**: Dado dos polinomios, se dicen que son opuestos si sus coeficientes, de igual grado, son opuestos. Para indicar que es el polinomio opuesto se ubica un "–" delante del polinomio.

Ejemplo: sea $P_{(x)} = x^2 + 3x - 4$ (es opuesto a) $-P_{(x)} = -x^2 - 3x + 4$

**Igualdad de polinomios**: Dos polinomios son iguales si tienen el mismo grado y sus coeficientes de igual grado, son iguales.

Aunque los polinomios pueden tener varias variables en diferentes términos, en este apunte sólo se tratarán los polinomios que tienen una sola variable indeterminada.

**Adición De Polinomios**: Dos polinomios se suman agrupando los términos de uno y otro y simplificando los monomios semejantes (del mismo grado). Para realizar en la práctica la suma de dos polinomios se sitúan uno sobre otro haciendo coincidir en la misma columna los términos de igual grado, con lo que la simplificación de términos semejantes es automática. Pero puede hacerse más fácil la operación reuniendo los términos de igual grado y sumarlos o restarlos según su signo.

Para sumar $P_{(x)} = 3x^4 - 5x^2 + 7x$ con $Q_{(x)} = x^3 + 2x^2 - 11x + 3$ se procede así:

$P_{(x)} + Q_{(x)} = (3x^4 - 5x^2 + 7x) + (x^3 + 2x^2 - 11x + 3) = 3x^4 + x^3 + x^2 (2 - 5) + x (7 - 11) + 3 = P_{(x)} + Q_{(x)} = 3x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x + 3$

La adición de polinomios cumple las propiedades asociativa y conmutativa.

El polinomio cero es el número 0, pues sumado con cualquier polinomio no lo altera, por lo que es el elemento neutro de la suma. Todo polinomio tiene un opuesto, que se obtiene cambiando el signo de todos sus monomios. Si a un polinomio le sumamos su opuesto se obtiene el número 0 (polinomio neutro).

Se llama diferencia de dos polinomios, $P_{(x)} - Q_{(x)}$ , al resultado de sumarle a $P_{(x)}$ el opuesto de $Q_{(x)}$.

**Multiplicación De Polinomios**: Para multiplicar dos polinomios se multiplica término a término cada monomio de uno por cada monomio del otro y, posteriormente, se reducen los monomios semejantes.

A continuación, con un ejemplo, se ve cómo se procede en la práctica para efectuar el producto de dos polinomios. Para los polinomios $P_{(x)} = 5x + 11$ y $Q_{(x)} = x3 + 2x2 + 4$:

$P_{(x)} \,.\, Q_{(x)} = (5x + 11)\,(x^3 + 2x^2 + 4)$ (aplicamos distributiva)
$P_{(x)} \,.\, Q_{(x)} = 5x^4 + 10x^3 + 20x + 11x^3 + 22x^2 + 44$ (sumamos)
$P_{(x)} \,.\, Q_{(x)} = 5x^4 + (10 + 11)\, x^3 + 22x^2 + 20x + 44$
$P_{(x)} \,.\, Q_{(x)} = 5x^4 + 21\, x^3 + 22x^2 + 20x + 44$

La multiplicación de polinomios cumple las propiedades asociativa y conmutativa.

El polinomio unidad es el número 1, pues multiplicando por cualquier polinomio no lo altera. Por tanto, es el elemento neutro del producto. No existe polinomio inverso de otro, es decir, en el conjunto de los polinomios con una indeterminada no hay elemento inverso.

La multiplicación de polinomios es distributiva respecto a la adición. Cualesquiera que sean los polinomios $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, se verifica que

$$P_{(x)} \cdot [Q_{(x)} + R_{(x)}] = P_{(x)} \cdot Q_{(x)} + P_{(x)} \cdot R_{(x)}$$

**División de polinomios**: Dados dos polinomios $P_{(x)}$ (llamado dividendo) y $Q_{(x)}$ (llamado divisor) de modo que el grado de $P_{(x)}$ sea mayor que el grado de $Q_{(x)}$ y $Q_{(x)} \neq 0$ siempre hallaremos dos polinomios $C_{(x)}$ (llamado cociente) y $R_{(x)}$ (llamado resto) tal que:

$$P_{(x)} = Q_{(x)} \,.\, C_{(x)} + R_{(x)}$$

El grado de $C_{(x)}$ está determinado por la diferencia entre los grados de P y Q, mientras que el grado de $R_{(x)}$ será, como máximo, un grado menor que Q.

Para obtener los polinomios cociente y resto a partir de los polinomios dividendo y divisor se procede como en el ejemplo siguiente, con $P_{(x)} = 5x^3 + 7x^2 - 3$ y

$Q_{(x)} = x^2 + 2x - 1$:

$$\begin{array}{rrrr|l}
5x^3 & +7x^2 & +0x & -3 & x^2+2x-1 \\
\cline{5-5}
-5x^3 & -10x^2 & +5x & & 5x-3 \\
\cline{1-4}
 & -3x^2 & +5x & -3 & \\
 & +3x^2 & +6x & -3 & \\
\cline{2-4}
 & & 11x & -6 &
\end{array}$$

El cociente es $C_{(x)} = 5x - 3$, y el resto, $R_{(x)} = 11x - 6$.

La descripción del proceso es la siguiente:

El primer monomio del cociente se obtiene dividiendo el monomio de mayor grado del numerador por el del denominador: $5x^3 : x^2 = 5x$

Se multiplica $5x$ por el divisor y el resultado se resta del dividendo.

Una vez obtenida la diferencia se inicia el proceso como si ésta fuera el dividendo.

El proceso concluye cuando la diferencia es de grado inferior al divisor.

Cuando el resto de la división es cero, entonces se dice que la división es exacta y que el dividendo, $P(x)$, es múltiplo del divisor, o bien que $P_{(x)}$ es divisible por $Q_{(x)}$ y se cumple la relación:

$P_{(x)} = Q_{(x)} \cdot C_{(x)}$

**Teorema Del Resto:** El resto de una división de un polinomio en *"x"* por un binomio de forma ($x \pm a$) es el valor numérico del polinomio evaluando para "$x$" igual al opuesto de "$a$".

$R = P_{(-a)}$. Por ejemplo, si $P_{(x)} = 3x^4 - 5x^2 + 3x - 20$ para $x = 2$ se obtiene:
$P_{(2)} = 3.\ 2^4 - 5.\ 2^2 + 3.\ 2 - 20 = 14$

**Factorización de un Polinomio:** Se dice que un número $a$ es raíz de un polinomio $P(x)$ si $P_{(a)} = 0$, es decir, si el valor numérico del polinomio para $x = a$ es cero. Se suele decir, también, que el polinomio $P_{(x)}$ *se anula* para $x = a$.

Por el teorema del resto, si $a$ es una raíz del polinomio $P(x)$, entonces $P(x)$ es divisible por $x - a$, pues el resto de dividir $P(x)$ entre $x - a$ es cero. A cada uno de esos valores se los suele designar $x_1$, $x_2$, $x_3$, etc.

$P_{(x)} = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$
$P_{(x)} = a_0 (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$ (Polinomio factorizado).

Habitualmente, para reconocer las raíces enteras de un polinomio con coeficientes enteros se tiene en cuenta que éstas han de ser divisores del término independiente. Así, las raíces enteras del polinomio $P_{(x)} = x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 4x - 12$ están entre los divisores de 12. Por tanto, pueden ser raíces de $P_{(x)}$ los números 1, –1, 2, –2, 3, –3, 4, –4, 6,– 6, 12 y – 12.

Para descomponerlo en factores se prueba sucesivamente por todas ellas aplicando la regla de Ruffini. Para no trabajar de más se aplica el teorema del resto verificando cual de estos valores da como resto cero.

$P_{(x)} = x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 4x - 12$

$P_{(1)} = 1^4 - 6.1^3 + 9.1^2 + 4.1 - 12 = -4$

Puesto que el resto, – 4, es distinto de 0, se concluye que $P_{(x)}$ no es divisible por $x - 1$, o lo que es lo mismo, 1 no es raíz de $P_{(x)}$. Probando con –1:

$P_{(-1)} = (-1)^4 - 6.(-1)^3 + 9.(-1)^2 + 4.(-1) - 12 = 0$

–1 es raíz de $P_{(x)}$, es decir, $P_{(x)}$ es divisible por $x + 1$:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -6 & 9 & 4 & -12 \\ -1 & & -1 & 7 & -16 & 12 \\ \hline & 1 & -7 & 16 & -12 & 0 \end{array}$$

$P_{(x)} = (x + 1)(x^3 - 7x^2 + 16x - 12)$

Para hallar más raíces de $P_{(x)}$, se obtienen las raíces de $P_{(x)} = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$. Se prueba de nuevo con – 1:

$P_{(-1)} = (-1)^3 - 7(-1)^2 + 16(-1) - 12 = -36$

– 1 no es raíz de $P_{1(x)}$. Probando con 2:

$P_{(2)} = (2)^3 - 7(2)^2 + 16(2) - 12 = 0$

2 es raíz de $P_{1(x)}$ y, por tanto, de $P_{(x)}$:

$P_{(x)} = (x + 1)(x - 2)(x^2 - 5x + 6)$

Apliquemos cuadrática

$x^2 - 5x + 6$

$$\frac{-(-5) \pm \sqrt{5^2 - 4.1.6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{5+1}{2} = 3 \\ x_2 = \dfrac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

$P_{(x)} = (x + 1)(x - 2)\,(x - 2)\,(x - 3)$

2 es nuevamente raíz de $P_{(x)}$. Es una raíz doble. Ahora ya se ha conseguido la factorización completa de $P_{(x)}$:

$P_{(x)} = (x + 1)(x - 2)^2\,(x - 3)$

En caso de una ecuación polinómica, lo conveniente es: igualar a cero, factorizar para hallar los resultados buscados de $x$.

Raíces de los Polinomios:

$$P(x) = 3x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 4$$

$$q = \pm 1, \pm 3 \qquad\qquad p = \pm 1, \pm 2, \pm 4$$

$$\text{raíces} \rightarrow \frac{p}{q} = \pm 1,\ \pm 1/3,\ \pm 2,\ \pm 2/3, \pm 4, \pm 4/3$$

En $P(x)$ hay 4 cambios de signo $\Rightarrow$ 4, 2 o 0 racíces positivas (+)

En $P(-x)$ hay 0 cambios de signo $\Rightarrow$ 0 raíces negativas (-)

Ejercitación

a) Decidir si las siguientes expresiones son polinomios, en caso de no serlo indicar porqué

1) $P(x) = 5x^6 - \sqrt{3}x^4 + x^2 - 2x$

2) $P(x) = 2x^3 + 9x^2 + 8x^{-1} + 5$

3) $P(x) = 3\sqrt{x} + 5x - 6$

Respuesta: 1) si 2) No, potencia no natural 3) No, raíz.

b) Halla el grado de cada uno de los siguientes polinomios

1) $P_{(x)} = x^2 + 3x - 4$

2) $P_{(x)} = x^4 + 5x^7 - 4x$

3) $P_{(x)} = x^2 + 3x - 4x^3 + 2$

Respuesta: 1) Segundo grado. 2) Séptimo grado. 3) Tercer grado

c) Indicar si los polinomios están completos, ordenados o ambos. En caso de no estarlo escribirlos completos y ordenados.

1) $P_{(x)} = 3x - 4 + x^2$

2) $P_{(x)} = x^3 + 3x^5 - 2$

3) $P_{(x)} = 2x^2 + 7x - 4x^3 - 1$

Respuesta: 1) completo, no ordenado.
2) incompleto y no ordenado.
3) incompleto y no ordenado.

d) Halla el valor numérico de los siguientes polinomios

1) $P_{(x)} = 3x^2 - 4\,x + 2$ para $x = 1$

2) $P_{(x)} = 2x^3 - 4\,x^2 + 2\,x - 3$ para $x = -1$.

3) $P_{(x)} = 4x^2 – 5x + 2$ para $x = 0$

Respuesta: 1) 1  2) – 11  3) 2

e) Aplicar la regla de Ruffini para calcular las siguientes divisiones y verificar el resto por el teorema de resto.

$1)(7x^3 - 11x^2 - 12x + 45) : (x - 3) =$

$2)(x^2 + 4x + 6) : (x + 2) =$

$3)(5x^4 - 2x + x^2 - 6x^3 - 1) : (x - 1) =$

$4)(-15x^2 + 5x^3 - 60x + 50) : (x - 5) =$

Respuesta:

1) $7x^2 + 10x + 15$,

2) $x + 2$ (resto: 2),

3) $5x^3 – x^2 – 2$ (resto: – 3),

4) $5x^2 + 10x – 10$

f) Indicar sin realizar la división si los siguientes polinomios son divisibles

1) $P_{(x)} = x^5 – 1$   $Q_{(x)} = x – 1$

2) $P_{(x)} = x^3 – 1$   $Q_{(x)} = x + 1$

3) $P_{(x)} = x^2 + 6x + 9$   $Q_{(x)} = x + 3$

4) $P_{(x)} = x^4 – x^2 – 12$   $Q_{(x)} = x + 2$

Respuesta: 1) si  2) no  3) si  4) si

g) Hallar el valor de "k" para que los siguientes polinomios sean divisibles

1) $P_{(x)} = 3x^2 + k\,x – 8$ $Q_{(x)} = x – 2$

2) $P_{(x)} = x^2 + (k – 2)\,x + 1$ $Q_{(x)} = x + 2$

3) $P_{(x)} = (3 + k)x^2 + k^2\,x – 5$ $Q_{(x)} = x – 1$

Respuesta: 1) k = 2,  2) k = 9/2  3) k = 1 ó k = - 2.

h) Hallar las raíces de los siguientes polinomios (factorizarlos)

1) $P_{(x)} = x^2 – 5x + 6$

2) $Q_{(x)} = 3x^2 + 18x + 24$

3) $H_{(x)} = x^3 – 4x^2 – x + 4$

4) $R_{(x)} = x^3 + x^2 – 16\,x – 16$

Respuesta:

1) $P_{(x)} = (x – 3)(x – 2)$,  2) $Q_{(x)} = 3.(x + 2)(x + 4)$,

3) $H_{(x)} = (x – 4)(x + 1)(x – 1)$,  4) $R_{(x)} = (x + 4)(x – 4)(x + 1)$

i) Resolver los siguientes problemas

1) Escribir todos los polinomios de grado tres cuya única raíz sea 3. ¿La respuesta es única.?

Respuesta: $P_{(x)} = a\,.\,(x – 3)^3$. No "$a$" puede tener muchos valores.

2) Escribir un polinomio de grado tres donde 4 sea una raíz doble y – 1 una raíz simple, además que cumpla $P_{(2)} = 24$

Respuesta: $P_{(x)} = 2.(x – 4)^2\,(x + 1)$

3) Escribir el polinomio de grado tres sabiendo que $P_{(-2)} = P_{(1)} = P_{(5)} = 0$ y que $P_{(0)} = 50$

Respuesta: $P_{(x)} = 5\,(x + 4)(x – 1)(x + 5)$

4) Hallar una función polinómica de grado dos que corte al eje $x$ en los puntos (3, 0 ) y (– 1, 0 ) y tal que $f_{(0)} = 6$.

Respuesta: $P_{(x)} = 2\,(x - 3)(x + 1)$

5) Hallar la función polinómica de grado 3, cuyos ceros sean –1, 2 y 3, para que verifique que $f_{(1)} = 12$

Respuesta: $P_{(x)} = -3\,(x + 1)(x - 2)(x - 3)$