Contenido

3.1 Ecuaciones

Recordemos que en una expresión algebraica no constante, a las variables se les puede asignar valores reales para obtener así el valor numérico de la expresión dada:

■ **Ejemplo 1**

1. En la expresión $3x^2bc$ a las variables x, b, c se les puede asignar cualquier valor real, y el resultado siempre es un número real.

2. Si en $\dfrac{x^2+4}{x-2}$ a x le asignamos el valor de 2, es decir $x=2$ entonces la expresión resultante **no** representa un número real. (Recuerde que si el denominador de una fracción es cero, entonces ésta no representa un número real). Se puede demostrar que si se sustituye x por cualquier valor real diferente de 2, el resultado es un número real.

3. En $\sqrt{x-3}$ se puede demostrar que si x se sustituye por cualquier número real menor que 3 entonces la expresión resultante no representa un número real (a modo de ejemplo probar con $x=0, x=1$).
(Recuerde que la raíz cuadrada de un número negativo **no** representa un número real)

Los casos (2) y (3) anteriores son ejemplos que ilustran el hecho que para algunas expresiones algebraicas no constantes, existen números reales, que al ser sustituidos por las variables correspondientes en la expresión dada, hacen que el resultado obtenido **no** represente un número real.

Ejercicios 1

1. Para cada uno de los casos siguientes, escriba los números reales que al ser sustituidos por la variable en la expresión dada, hacen que el resultado obtenido no represente un número real.

   a) $\dfrac{1}{x-2}$ c) $\dfrac{x+2}{x}$ e) $\dfrac{-2}{x(x-4)}$

   b) $\dfrac{2x+3}{-x+5}$ d) $\dfrac{x}{x+3}$ f) $\dfrac{x-2}{(x+3)(x-1)(4-x)}$

2. Para cada uno de los casos siguientes, escriba cinco números reales, que al ser sustituidos por la variable en la expresión dada, hacen que el resultado obtenido no represente un número real.

   a) $\sqrt{x+1}$ c) $\sqrt{-x}$ e) $\sqrt{-x+4}$

   b) $\sqrt[4]{2x-3}$ d) $\sqrt[6]{-x+2}$ f) $\sqrt[8]{x-10}$

■ **Definición 1**

Dada una expresión algebraica de una sola variable y M un subconjunto del conjunto de los números reales, cuyos elementos son aquellos números que al ser sustituidos en la expresión algebraica dada el resultado, no representa un número real, entonces el conjunto D, definido por:

$$D = \mathbb{R} - M$$

recibe el nombre de **dominio de la variable** para la expresión algebraica dada.

Esto significa que al dominio de la variable en una expresión algebraica, pertenecen únicamente los números reales que al ser sustituidos por la variable hacen que el resultado obtenido represente un número real.

■ **Ejemplo 2**

Determine el dominio de la variable para cada una de las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{2x+1}{x-9}$

b) $\dfrac{x-4}{(x-1)(x+1)}$

Solución

a) En $\dfrac{2x+1}{x-9}$ si x se sustituye por 9 se obtiene como resultado una expresión que no representa un número real. Además se puede demostrar que 9 es el único valor de x para el cual $\dfrac{2x+1}{x-9}$ no representa un número real. Así tenemos que el dominio para x en la expresión $\dfrac{2x+1}{x-9}$ es $\mathbb{R}-\{9\}$ es decir:

$$D = \mathbb{R}-\{9\}$$

Lo anterior significa que a x en $\dfrac{2x+1}{x-9}$ se le puede asignar cualquier valor real, diferente de 9.

b) En $\dfrac{x-4}{(x-1)(x+1)}$, si x se sustituye por 1 o por -1, se obtiene como resultado una expresión que no representa un número real.

Además se puede demostrar que 1 y -1 son los únicos valores de x para los cuales $\dfrac{x-4}{(x-1)(x+1)}$ no representa un número real. Así tenemos que para x en la expresión $\dfrac{x-4}{(x-1)(x+1)}$ es $\mathbb{R}-\{1,-1\}$ es decir :

$$D = \mathbb{R}-\{-1,1\}$$

Lo anterior significa que a x en $\dfrac{x-4}{(x-1)(x+1)}$ se le puede asignar cualquier valor real, diferente de 1 y de -1.

Ejercicios 2

Determine el dominio de la variable para cada una de las siguientes expresiones:

1. $\dfrac{4}{x-5}$

2. $\dfrac{-x+4}{(x+2)(-x-5)}$

3. $\dfrac{x}{x^2-9}$

4. $\dfrac{x}{x(x+3)}$

■ Definición 2

Una igualdad entre dos expresiones algebraicas donde al menos una de las expresiones involucran variables, recibe el nombre de ecuación.

■ Ejemplo 3

a) $2x^2y + 3y = 5$

b) $\sqrt{x^2+1} = x + 2$

c) $\dfrac{m+2}{m-1} = 3$

d) $\dfrac{x}{3} + 2 = \dfrac{5y}{2} + 1$

e) $a^3 - 3x^2b + b^2 = 0$

f) $5 = \dfrac{8x\sqrt{y}}{z}$

Definición 3

En una ecuación las variables reciben el nombre de incógnitas.

Definición 4

En una ecuación de una incógnita cualquier número que esté contenido en el dominio de la incógnita y que al ser sustituido en la ecuación hace que la igualdad sea verdadera, es **una solución de la ecuación**.

Ejemplo 4

1. En $x + 2 = 3$, el dominio de la incógnita es $\mathbb{R}$, además si x se sustituye por 1, se obtiene la igualdad verdadera $1 + 2 = 3$, por lo que 1 es una solución de la ecuación $x + 2 = 3$

2. En $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}$, el dominio de x es $\mathbb{R} - \{0\}$, un valor de x que hace que la igualdad $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}$ sea verdadera es 2 y como 2 es un elemento de $\mathbb{R} - \{0\}$ entonces 2 es **una** solución de la ecuación dada.

3. En $\dfrac{2}{x+1} = x$, el dominio de x es $\mathbb{R} - \{-1\}$, $\dfrac{2}{1+1} = 1$ es una igualdad verdadera, y como 1 es un elemento de $\mathbb{R} - \{-1\}$ entonces 1 es una solución de la ecuación $\dfrac{2}{x+1} = x$

Definición 5

Dada una ecuación de una incógnita, el subconjunto S del dominio de la incógnita que contiene únicamente las soluciones de la ecuación dada recibe el nombre de **conjunto solución.**

Lo anterior afirma que si S es el conjunto solución de una ecuación, entonces en S están todas las soluciones y todo elemento de S es una solución de la ecuación dada.

Ejemplo 5

1. En $2x + 1 = 7$, el dominio de x es $\mathbb{R}$, un valor de x que hace que la igualdad $2x + 1 = 7$ sea verdadera es 3 y como 3 es un elemento de $\mathbb{R}$ y además se puede demostrar que 3 es la única solución de la ecuación dada, entonces su conjunto solución es $\{3\}$ es decir:

$$S = \{3\}$$

2. En $\dfrac{(x-4)(x+3)}{x-5} = 0$ el dominio de x es $\mathbb{R} - \{5\}$, 4 y -3 son dos soluciones de la ecuación dada. Como 4 y -3 son elementos de $\mathbb{R} - \{5\}$ y además se puede demostrar que 4 y -3 son las únicas soluciones de la ecuación dada, entonces su conjunto solución es $\{4, -3\}$ es decir:

$$S = \{4, -3\}$$

■ **Definición 6**

Resolver una ecuación significa determinar su conjunto solución.

3.1.1 Ecuaciones lineales con una incógnita

■ **Definición 7**

Sean a, b y c constantes reales con $a \neq 0$. Se llama ecuación lineal o de primer grado con una incógnita a toda ecuación que se puede llevar a la forma la forma $ax + b = c$.

■ **Ejemplo 6**

1. $-3x + 2 = 0$

2. $\dfrac{2}{5}(x-2) = 0$

3. $x + \sqrt{3}$

■ **Definición 8**

Si dos ecuaciones lineales con una incógnita tienen el mismo conjunto solución, decimos que son equivalentes entre sí.

■ **Ejemplo 7**

1. El conjunto solución de $2x + 3 = 13$ es $\{5\}$

   El conjunto solución de $4x + 6 = 26$ es $\{5\}$

   Como $2x + 3 = 13$ y $4x + 6 = 26$ tienen el mismo conjunto solución, entonces son equivalentes entre sí.

2. El conjunto solución de $3x + 5 = x - 3$ es $\{-4\}$

   El conjunto solución de $x = -4$ es $\{-4\}$

   Como $3x + 5 = x - 3$ y $x = -4$ tienen el mismo conjunto solución, entonces son equivalentes entre sí.

Para resolver algunas ecuaciones lineales usaremos el concepto de ecuaciones equivalentes. Para esto "transformaremos" la ecuación en otras equivalentes a la original, hasta obtener una ecuación de la forma $x = c$, donde x es una incógnita y c es una constante real.

3.1.2 Algunas "transformaciones" que se pueden usar para obtener ecuaciones equivalentes entre sí

1. **Intercambiar miembros de la ecuación**

   La ecuación $ax + b = c$ es equivalente a la ecuación $c = ax + b$

2. **Sumar el mismo número a ambos miembros de la igualdad**

   La ecuación $ax + b = c$ es equivalente a la ecuación $ax + b + d = c + d$

3. **Multiplicar ambos miembros de la igualdad por un mismo número (diferente de cero)**

   La ecuación $ax + b = c$ es equivalente a la ecuación $d \cdot (ax + b) = d \cdot c\,;\ d \neq 0$

4. **Algunas propiedades de la adición y la multiplicación definidas en $\mathbb{R}$**

   (conmutativa, asociativa, etc.)

Veamos algunos ejemplos que se resuelven usando las propiedades anteriores:

Ejemplo 8

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $x + 7 = 11$

   Solución

   $$\begin{aligned} x + 7 + -7 &= 11 + -7 \\ x + 0 &= 4 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

   Por lo que el conjunto solución de $x + 7 = 11$ es $\{\ 4\}$

2. $5x - 2 = 6$

   Solución

$$\begin{aligned} 5x-2+2 &= 6+2 \\ 5x+0 &= 8 \\ 5x &= 8 \\ \frac{1}{5}\cdot 5x &= \frac{1}{5}\cdot 8 \\ \frac{5}{5}x &= \frac{8}{5} \\ x &= \frac{8}{5} \end{aligned}$$

Por lo que el conjunto solución de $5x-2=6$ es $\left\{\frac{8}{5}\right\}$

3. $-2x+5=7$

Solución

$$\begin{aligned} -2x+5-5 &= 7-5 \\ -2x+0 &= 2 \\ -2x &= 2 \\ \frac{-1}{2}\cdot -2x &= \frac{-1}{2}\cdot 2 \\ \frac{2}{2}x &= \frac{-2}{2} \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Por lo que el conjunto solución de $-2x+5=7$ es { -1}

4. $\dfrac{-x}{4}-\dfrac{1}{3}=1$

Solución

$$\begin{aligned} \frac{-x}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3} &= 1+\frac{1}{3} \\ \frac{-x}{4}+0 &= \frac{4}{3} \\ \frac{-x}{4} &= \frac{4}{3} \\ -4\cdot\frac{-x}{4} &= -4\cdot\frac{4}{3} \\ \frac{4}{4}\cdot x &= \frac{-16}{3} \\ x &= \frac{-16}{3} \end{aligned}$$

Por lo que el conjunto solución de $\dfrac{-x}{4}-\dfrac{1}{3}=1$ es $\left\{\dfrac{-16}{3}\right\}$

Nota: en el proceso de resolución de ecuaciones no es necesario enumerar todas las transformaciones que se realicen, pues a veces se pueden "dejar de escribir" algunos pasos.

Ejemplo 9

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $-3x + 2 = -4$

   Solución

$$\begin{aligned} -3x+2 &= -4 \\ -3x &= -4+(-2) \\ -3x &= -6 \\ x &= \frac{-6}{-3} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

   Por lo que el conjunto solución es $\{2\}$

2. $3x + 4 = 2x - 6$

   Solución

$$\begin{aligned} 3x+4 &= 2x-6 \\ -2x+(3x+4) &= -6 \\ -2x+3x+4 &= -6 \\ x+4 &= -6 \\ x &= -6+(-4) \\ x &= -10 \end{aligned}$$

Por lo que el conjunto solución es $\{-10\}$

Ejemplo 10

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $2 - \{1 + 2[3 - x]\} = 0$

   Solución

$$\begin{aligned}
2-\{1+2[3-x]\} &= 0\\
2-\{1+6-2x\} &= 0\\
2-\{7-2x\} &= 0\\
2-7+2x &= 0\\
-5+2x &= 0\\
2x &= 0+5\\
2x &= 5\\
x &= \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

Por lo que el conjunto solución es $\left\{\frac{5}{2}\right\}$

2. $\dfrac{1}{3}-\dfrac{5x+1}{6}=\dfrac{1}{6}$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}-\frac{5x+1}{6} &= \frac{1}{6}\\
\frac{2-(5x+1)}{6} &= \frac{1}{6}\\
\frac{2-5x-1}{6} &= \frac{1}{6}\\
\frac{1-5x}{6} &= \frac{1}{6}\\
1-5x &= \frac{6}{6}\\
1-5x &= 1\\
-5x &= 1-1\\
-5x &= 0\\
x &= \frac{0}{-5}\\
x &= 0
\end{aligned}$$

Por lo que el conjunto solución es $\{0\}$

Ejercicios 3

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $2x+1=-5$

b) $2-\left(\dfrac{1}{2}+x\right)=4$

c) $\dfrac{-x}{2}-3=0$

d) $x-\dfrac{2x-1}{3}=\dfrac{x+1}{2}$

e) $\dfrac{3x}{5}-\dfrac{1}{4}=1$

f) $\left(3-\dfrac{x}{2}\right)-\left(1-\dfrac{x}{3}\right)=7-\left(x-\dfrac{x}{2}\right)$

3.2 Ecuaciones en las cuales uno de sus miembros es un producto de factores lineales y el otro miembro es cero

Para resolver este tipo de ecuaciones haremos uso de la siguiente propiedad:

Propiedad 1

Sean $a_1 \in \mathbb{R},\ a_2 \in \mathbb{R}, ...,\ a_n \in \mathbb{R}$

Si $a_1.\ a_2.\ a_3...\ a_n = 0$ entonces $a_1 = 0$ ó $a_2 = 0$ ó $a_3 = 0$, ..., ó $a_n = 0$

Estudiemos algunos ejemplos en los cuales se ilustran el uso de esta propiedad.

Ejemplo 11

Resuelva las siguientes ecuaciones:

1. $(x+7)(x+5) = 0$

   Solución

   $(x+7)(x+5) = 0$

   Entonces

$$\begin{array}{rclcrcl} (x+7) & = & 0 & \text{ó} & (x+5) & = & 0 \\ x & = & -7 & \text{ó} & x & = & -5 \end{array}$$

   Por lo que el conjunto solución es $\{-7, -5\}$

2. $-4x(3x+2)(-x+6) = 0$

   Solución

   $-4x(3x+2)(-x+6) = 0$

$$\begin{array}{rclcrclcrcl} -4x & = & 0 & \text{ó} & (3x+2) & = & 0 & \text{ó} & (-x+6) & = & 0 \\ x & = & \dfrac{0}{-4} & \text{ó} & 3x & = & -2 & \text{ó} & -x & = & -6 \\ x & = & 0 & \text{ó} & x & = & \dfrac{-2}{3} & \text{ó} & x & = & 6 \end{array}$$

Por lo que el conjunto solución es $\left\{0, \dfrac{-2}{3}, 6\right\}$

Ejercicios 4

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $(x-2)\left(3x+\dfrac{3}{2}\right)=0$

2. $3x(x-8)(3x-1)=0$

3. $(5x+1)(2x)(x-6)(-4x+3)=0$

A continuación nuestro objetivo es resolver ecuaciones, en las cuales uno de sus miembros es un polinomio de grado mayor que uno. En el proceso de resolución de este tipo de ecuaciones haremos uso de los métodos de factorización estudiados anteriormente, con el fin de obtener una ecuación equivalente a la original, la cual se puede resolver por medio de la propiedad anterior. Por esto veamos diferentes tipos de ecuaciones que se pueden presentar.

3.3 Ecuación Cuadrática

■ Definición 9

Sean a, b, c y d constantes reales con $a \neq 0$. Se llama ecuación cuadrática o ecuación de segundo grado con una incógnita a toda ecuación que se puede llevar a la forma:

$$ax^2+bx+c=d$$

■ Ejemplo 12

1. $3x^2-x+1=0$

2. $4x^2-1=3$

3. $6x^2+4x=-1$

4. $x^2+x+1=9$

Veamos algunos ejemplos resueltos, donde se ilustran algunas técnicas que pueden usar para resolver ecuaciones cuadráticas y algunas ecuaciones que "se pueden transformar" a la forma cuadrática.

■ Ejemplo 13

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $x^2 + 3x = 0$
2. $x^2 - 1 = 0$
3. $x^2 - 6x + 9 = 0$
4. $x^2 - 9 = -1$
5. $x^2 + 2x - 3 = 5x - 3$
6. $4x^2 + 2x = -2x - 1$

Solución

1. $x^2 + 3x = 0$

$$\begin{aligned} x^2 + 3x &= 0 \\ x(x+3) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{array}{rcl c rcl} x &=& 0 & \text{ó} & x+3 &=& 0 \\ x &=& 0 & \text{ó} & x &=& -3 \end{array}$$

Por lo que el conjunto solución es $\{0, -3\}$

2. $x^2 - 1 = 0$

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= 0 \\ (x-1)(x+1) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{array}{rcl c rcl} x-1 &=& 0 & \text{ó} & x+1 &=& 0 \\ x &=& 1 & \text{ó} & x &=& -1 \end{array}$$

Por lo que el conjunto solución es $\{1, -1\}$

3. $x^2 - 6x + 9 = 0$

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 9 &= 0 \\ (x-3)^2 &= 0 \\ (x-3)(x-3) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{array}{rclcrcl} x-3 &=& 0 & \text{ó} & x-3 &=& 0 \\ x &=& 3 & \text{ó} & x &=& 3 \end{array}$$

Por lo que el conjunto solución es $\{3\}$

4. $x^2 - 9 = -1$

$$\begin{aligned} x^2 - 9 &= -1 \\ x^2 - 9 + 1 &= 0 \\ x^2 - 8 &= 0 \\ x^2 - (\sqrt{8})^2 &= 0 \\ \left(x - \sqrt{8}\right)\left(x + \sqrt{8}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{array}{rclcrcl} x-\sqrt{8} &=& 0 & \text{ó} & x+\sqrt{8} &=& 0 \\ x &=& \sqrt{8} & \text{ó} & x &=& -\sqrt{8} \end{array}$$

Por lo que el conjunto solución es $\left\{\sqrt{8}, -\sqrt{8}\right\}$

5. $x^2 + 2x - 3 = 5x - 3$

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 3 &= 5x - 3 \\ x^2 + 2x - 3 - 5x + 3 &= 0 \\ x^2 - 3 &= 0 \\ x(x-3) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{array}{rclcrcl} x & = & 0 & \text{ó} & x-3 & = & 0 \\ x & = & 0 & \text{ó} & x & = & 3 \end{array}$$

Por lo que el conjunto solución es $\{0, 3\}$

6. $4x^2 + 2x = -2x - 1$

$$\begin{array}{rcl} 4x^2 + 2x & = & -2x - 1 \\ 4x^2 + 2x + 2x + 1 & = & 0 \\ 4x^2 + 4x + 1 & = & 0 \\ (2x+1)^2 & = & 0 \\ (2x+1)(2x+1) & = & 0 \end{array}$$

Entonces:

$$\begin{array}{rclcrcl} 2x+1 & = & 0 & \text{ó} & 2x+1 & = & 0 \\ 2x & = & -1 & \text{ó} & 2x & = & -1 \\ x & = & \dfrac{-1}{2} & \text{ó} & x & = & \dfrac{-1}{2} \end{array}$$

Por lo que el conjunto solución es $\left\{\dfrac{-1}{2}\right\}$

Ejercicios 5

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $2x^2 - 3 = 0$

b) $3x^2 + 27x = 0$

c) $x^2 + 10x + 25 = 0$

d) $x^2 + 10x = 2x^2 - 5x$

e) $x^2 + 6x - 3 = -x^2 + 10x - 5$

f) $x^2 + \dfrac{1}{9} = \dfrac{2}{3}x$

Observe que dentro del proceso de resolución de las ecuaciones anteriores hemos usado, según el caso, de los métodos de factorización: factor común y fórmula notable, esto por las características particulares que presentaban las expresiones algebraicas involucradas en cada una de las ecuaciones.

A continuación estudiaremos un procedimiento, que nos permite, en general resolver cualquier ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con a, b y c constantes reales y $a \neq 0$.

Teorema 1

Sean a, b y c constantes reales con $a \neq 0$, tal que $ax^2 + bx + c = 0$ y $\Delta = b^2 - 4ac$

1. Si $\Delta < 0$ entonces la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene solución en el conjunto de los números reales, es decir el conjunto solución de $ax^2 + bx + c = 0$ es $\varnothing$

2. Si $\Delta = 0$ entonces $ax^2 + bx + c = 0$ tiene una única solución, la cual viene dada por $\dfrac{-b}{2a}$, es decir el conjunto solución de $ax^2 + bx + c = 0$ es $\left\{\dfrac{-b}{2a}\right\}$

3. Si $\Delta > 0$ entonces $ax^2+bx+c = 0$ tiene dos soluciones, las cuales vienen dadas por $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ y $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ es decir el conjunto solución de $ax^2 + bx + c = 0$ es $\left\{\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

Demostración:

1. Si $\Delta < 0$ entonces $ax^2 + bx + c = 0$ **no** es factorizable en $\mathbb{R}$, es decir $ax^2 + bx + c \neq 0, \forall\ x \in \mathbb{R}$

   Por lo que $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene solución en $\mathbb{R}$, o equivalente su conjunto solución es $\varnothing$.

2. Si $\Delta = 0$ entonces $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$

   Así que:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= 0 \\ a\left(x + \frac{b}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a}\right) &= 0 \end{aligned}$$

   Luego como $a \neq 0$, debe darse que:

$$\begin{array}{lrcl} & x + \dfrac{b}{2a} = 0 & \text{ó} & x + \dfrac{b}{2a} = 0 \\ \Longrightarrow & x = \dfrac{-b}{2a} & \text{ó} & x = \dfrac{-b}{2a} \end{array}$$

   Por lo que :

   Si $\Delta = 0$ entonces el conjunto solución de $ax^2 + bx + c = 0$ es $\left\{\dfrac{-b}{2a}\right\}$

3. Si $\Delta > 0$ entonces $ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)$ con $\alpha = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $\beta = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Así tenemos que:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= 0 \\ a(x-\alpha)(x-\beta) &= 0 \end{aligned}$$

Luego como $a \neq 0$, debe darse que:

$$\begin{array}{rrcl} & x-\alpha = 0 & \text{ó} & x-\beta = 0 \\ \Longrightarrow & x = \alpha & \text{ó} & x = \beta \end{array}$$

y como $\alpha = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ y $\beta = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

entonces $x = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ó $x = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Por lo que:

Si $\Delta > 0$ entonces el conjunto solución de $ax^2+bx+c=0$ es $\left\{\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

Ejemplo 14

Resuelva las siguientes ecuaciones:

1. $2x^2+5x-12=0$

2. $-x^2-x+1=0$

3. $2x^2-3x+2=0$

4. $x^2-1=x-2$

5. $3x^2+3x+3=x+4$

6. $-2x^2+5x-4=-x^2-x+5$

Solución

1. $2x^2+5x-12=0$

$$\begin{aligned} \Delta &= 5^2-4(2)(-12) \\ \Delta &= 25-(8)(-12) \\ \Delta &= 25+96 \\ \Delta &= 121 \end{aligned}$$

Como $\Delta > 0$ entonces la ecuación correspondiente tiene dos soluciones

$$\begin{array}{lllllll}
\alpha & = & \dfrac{-5-\sqrt{121}}{2(2)} & \text{y} & \beta & = & \dfrac{-5+\sqrt{121}}{2(2)} \\
\alpha & = & \dfrac{-5-11}{4} & \text{y} & \beta & = & \dfrac{-5+11}{4} \\
\alpha & = & \dfrac{-16}{4} & \text{y} & \beta & = & \dfrac{6}{4} \\
\alpha & = & -4 & \text{y} & \beta & = & \dfrac{3}{2}
\end{array}$$

Por lo que el conjunto solución es $\left\{-4, \dfrac{3}{2}\right\}$

2. $-x^2 - x + 1 = 0$

$$\begin{array}{lll}
\Delta & = & (-1)^2 - 4(-1)(1) \\
\Delta & = & 1 - (-4) \\
\Delta & = & 1 + 4 \\
\Delta & = & 5
\end{array}$$

Como $\Delta > 0$ entonces la ecuación correspondiente tiene dos soluciones

$$\begin{array}{lllllll}
\alpha & = & \dfrac{-(-1)-\sqrt{5}}{2(-1)} & \text{y} & \beta & = & \dfrac{-(-1)+\sqrt{5}}{2(-1)} \\
\alpha & = & \dfrac{1-\sqrt{5}}{-2} & \text{y} & \beta & = & \dfrac{1+\sqrt{5}}{-2} \\
\alpha & = & \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} & \text{y} & \beta & = & \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}
\end{array}$$

Por lo que el conjunto solución es $\left\{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$

3. $2x^2 - 3x + 2 = 0$

$$\begin{array}{lll}
\Delta & = & (-3)^2 - 4(2)(2) \\
\Delta & = & 9 - 16 \\
\Delta & = & -7
\end{array}$$

Como $\Delta < 0$, entonces la ecuación correspondiente no tiene solución en $\mathbb{R}$, por lo que el conjunto solución es $\varnothing$

4. $x^2 - 1 = x - 2$

$$\begin{aligned} x^2-1 &= x-2 \\ x^2-1-x+2 &= 0 \\ x^2-x+1 &= 0 \\ \Delta &= (-1)^2-4(1)(1) \\ \Delta &= 1-4 \\ \Delta &= -3 \end{aligned}$$

Como $\Delta < 0$ la ecuación correspondiente no tiene solución en $\mathbb{R}$, por lo que el conjunto solución es $\varnothing$

5. $3x^2+3x+3=x+4$

$$\begin{aligned} 3x^2+3x+3 &= x+4 \\ 3x^2+3x+3-x-4 &= 0 \\ 3x^2+2x-1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= (2)^2-4(3)(-1) \\ \Delta &= 4+12 \\ \Delta &= 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{-2-\sqrt{16}}{2(3)} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{-2+\sqrt{16}}{2(3)} \\ \alpha &= \frac{-2-4}{6} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{-2+4}{6} \\ \alpha &= \frac{-6}{6} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{2}{6} \\ \alpha &= -1 \quad \text{y} \quad \beta = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Por lo que el conjunto solución es $\left\{-1, \frac{1}{3}\right\}$

6. $-2x^2+5x-4=-x^2-x+5$

$$\begin{aligned} -2x^2+5x-4 &= -x^2-x+5 \\ -2x^2+5x-4+x^2+x-5 &= 0 \\ -x^2+6x-9 &= 0 \\ \Delta &= (6)^2-4(-1)(-9) \\ \Delta &= 36-36 \\ \Delta &= 0 \end{aligned}$$

Como $\Delta = 0$, entonces la ecuación correspondiente tiene una única solución real

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{-6}{2(-1)}\\ \alpha &= \frac{-6}{-2}\\ \alpha &= 3\end{aligned}$$

Por lo que el conjunto solución es $\{3\}$

Ejercicios 6

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

a)	$-5x^2 + x - 1 = 0$	d)	$3x^2 + 4x = 0$	g)	$x^2 - 2x + 1 = -x^2 - 2x + 5$
b)	$x^2 - 12x + 35 = 0$	e)	$5x^2 - 3 = 0$	h)	$x^2 - 2x = x + 3$
c)	$9x^2 - 6x + 1 = 0$	f)	$4x^2 - 7x - 2 = 0$	i)	$x^2 = -x^2 + 2x - 5$

3.4 Ecuaciones en las cuales uno de sus miembros es un polinomio de grado mayor o igual que tres

En la resolución de este tipo de ecuaciones haremos uso de los conceptos de factorización ya estudiados, addemás de los procedimientos usados para resolver ecuaciones cuadráticas, así como de la propiedad 1.

■ **Ejemplo 15**

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $x^3 - 5x = 0$

2. $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$

3. $x^3 - 2x^2 + x = 0$

Solución

1. $x^3 - 5x = 0$

$$\begin{aligned} x^3 - 5x &= 0 \\ x(x^2 - 5) &= 0 \\ x(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{array}{ccccccccccc} x &=& 0 & \text{ó} & x - \sqrt{5} &=& 0 & \text{ó} & x + \sqrt{5} &=& 0 \\ x &=& 0 & \text{ó} & x &=& \sqrt{5} & \text{ó} & x &=& -\sqrt{5} \end{array}$$

Por lo que el conjunto solución es $\{0, -\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$

2. $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 - 9x - 18 &= 0 \\ (x^3 + 2x^2) + (-9x - 18) &= 0 \\ x^2(x + 2) - 9(x + 2) &= 0 \\ (x^2 - 9)(x + 2) &= 0 \\ (x - 3)(x + 3)(x + 2) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{array}{ccccccccccc} x - 3 &=& 0 & \text{ó} & x + 3 &=& 0 & \text{ó} & x + 2 &=& 0 \\ x &=& 3 & \text{ó} & x &=& -3 & \text{ó} & x &=& -2 \end{array}$$

Por lo que el conjunto solución es $\{3, -3, -2\}$

3. $x^3 - 2x^2 + x = 0$

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 + x &= 0 \\ x(x^2 - 2x + 1) &= 0 \\ x(x - 1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{array}{rcl} x = 0 & ó & x-1 = 0 \\ x = 0 & ó & x = 1 \end{array}$$

Por lo que el conjunto solución es $\{0, 1\}$

Ejercicios 7

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $x^4 + 5x^2 = 0$

2. $8x^3 - 8x^2 + 2x = 0$

3. $x^4 - 3x^2 = x - 3$

Nuestro objetivo en los ejemplos siguientes es mostrar el uso de la división sintética, como un procedimiento que se puede utilizar para resolver ecuaciones (con soluciones racionales, en las cuales uno de sus miembros es un polinomio de grado mayor que dos con coeficientes enteros).

Ejemplo 16

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$

   Haciendo $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$

   a) $D_{-2} = \{-1, 1, 2, -2\}$ (divisores enteros de -2)

   b) $D_2 = \{1, 2\}$ (divisores naturales de 2)

   c) $D = \{-1, 1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 2, -2\}$ (cada elemento de D es un posible cero racional de $P(x)$)

   d) Calculemos $P(-1)$

   $$\begin{array}{rrrr|r} 2 & 3 & -3 & -2 & -1 \\ & -2 & -1 & 4 & \\ \hline 2 & 1 & -4 & 2 & \end{array}$$

   Como $P(-1) = 2$ entonces -1 no es cero de $P(x)$

e) Calculemos $P(1)$

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & 3 & -3 & -2 & 1 \\ & 2 & 5 & 2 & \\ \hline \underbrace{2 \quad 5 \quad 2}_{2x^2+5x+2} & & & 0 & \end{array}$$

Como $P(1) = 0$, entonces se tiene que: $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = (x-1)(2x^2+5x+2)$

Por lo que :

$$\begin{aligned} 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 &= 0 \\ (x-1)(2x^2+5x+2) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces:

$$x - 1 = 0 \quad \text{ó} \quad 2x^2 + 5x + 2 = 0 \quad (\text{ es decir } x = 1 \text{ es una solución de } P(x) = 0) \qquad (*)$$

f) Resolvamos $2x^2 + 5x + 2 = 0$

$$\begin{aligned} \Delta &= 5^2 - 4(2)(2) \\ \Delta &= 25 - 16 = 9 \\ \alpha &= \frac{-5-\sqrt{9}}{2(2)} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{-5+\sqrt{9}}{2(2)} \\ \alpha &= \frac{-5-3}{4} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{-5+3}{4} \\ \alpha &= \frac{-8}{4} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{-2}{4} \\ \alpha &= -2 \quad \text{y} \quad \beta = \frac{-1}{2} \qquad (**) \end{aligned}$$

$\therefore$ El conjunto solución de $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$ es $\left\{1, -2, \frac{-1}{2}\right\}$ por (*) y (**)

2. $x^3 + 7x^2 + 13x + 6 = 0$

Haciendo $P(x) = x^3 + 7x^2 + 13x + 6$

a) $D_6 = \{-1, 1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\}$ (divisores enteros de 6)

b) $D_1 = \{1\}$ (divisores naturales de 1)

c) $D = \{-1, 1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\}$ (posibles ceros racionales de $P(x)$)

d) Verifique que: $P(-1) = -1$, $P(1) = 27$, $P(2) = 68$, es decir -1, 1, 2 no son ceros de $P(x)$

e) Calculemos $P(-2)$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 13 & 6 & -2 \\ & -2 & -10 & -6 & \\ \hline \underbrace{1 \quad 5 \quad 3}_{x^2+5x+3} & & & 0 & \end{array}$$

Como $P(-2) = 0$, entonces se tiene que: $x^3 + 7x^2 + 13x + 6 = (x + 2)(x^2 + 5x + 3)$

Por lo que :

$$\begin{aligned} x^3 + 7x^2 + 13x + 6 &= 0 \\ (x + 2)(x^2 + 5x + 3) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} x + 2 &= 0 \quad \text{ó} \quad x^2 + 5x + 3 = 0 \\ x &= -2 \quad \text{ó} \quad x^2 + 5x + 3 = 0 \end{aligned}$$

(es decir $x = -2$ es una solución de $P(x) = 0$) (*)

f) Resolvamos $x^2 + 5x + 3 = 0$

$$\begin{aligned} \Delta &= 5^2 - 4(1)(3) \\ \Delta &= 25 - 12 = 13 \\ \alpha &= \frac{-5 - \sqrt{13}}{2(1)} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{-5 + \sqrt{13}}{2(1)} \\ \alpha &= \frac{-5 - \sqrt{13}}{2} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{-5 + \sqrt{13}}{2} \qquad (**) \end{aligned}$$

$\therefore$ El conjunto solución de $x^3 + 7x^2 + 13x + 6 = 0$ es $\left\{-2, \dfrac{-5 - \sqrt{13}}{2}, \dfrac{5 + \sqrt{13}}{2}\right\}$ por (*) y (**)

En los casos resueltos anteriormente se puede notar que en la resolución de las ecuaciones se manifiesta el siguiente resultado.

Resultado 1

Sea $P(x)$ un polinomio y α un cero de $P(x)$, es decir $P(\alpha) = 0$, entonces α es una solución de la ecuación $P(x) = 0$ Veamos como se usa este resultado en la solución de ecuaciones:

■ **Ejemplo 17**

Resolver:

1. $-6x^3 + 7x^2 - 1 = 0$

   Haciendo $P(x) = -6x^3 + 7x^2 - 1$

a) $D_{-1} = \{-1, 1\}$ (divisores enteros de -1)

b) $D_{-6} = \{1, 2, 3, 6\}$ (divisores naturales de -6)

c) $D = \left\{-1, 1, \dfrac{-1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{-1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{-1}{6}, \dfrac{1}{6}\right\}$ (posibles ceros racionales de $P(x)$ y por el resultado anterior posibles soluciones de $P(x) = 0$)

d) Verifique que: $P(-1) = 12,\ P(-1) \neq 0,$ por lo que -1 no es solución de la ecuación $P(x) = 0$

e) Calculemos $P(1)$

$$\begin{array}{cccc|c} -6 & 7 & 0 & -1 & 1 \\ & -6 & 1 & 1 & \\ \hline \underbrace{-6 \quad 1 \quad 1}_{-6x^2+x+1} & & & 0 & \end{array}$$

Como $P(1) = 0$, entonces 1 es una solución de $P(x) = 0$ y $-6x^3+7x^2-1 = (x-1)(-6x^2+x+1)$ (*)

f) Resolvamos $-6x^2 + x + 1 = 0$

$$\begin{aligned}
\Delta &= 1^2 - 4(-6)(1) \\
\Delta &= 1 + 24 = 25 \\
\alpha &= \frac{-1-\sqrt{25}}{2(-6)} \qquad \text{y} \quad \beta = \frac{-1+\sqrt{25}}{2(-6)} \\
\alpha &= \frac{-1-5}{-12} \qquad \text{y} \quad \beta = \frac{-1+5}{-12} \\
\alpha &= \frac{-6}{-12} \qquad \text{y} \quad \beta = \frac{4}{-12} \\
\alpha &= \frac{1}{2} \qquad \text{y} \quad \beta = \frac{-1}{3} \quad (**)
\end{aligned}$$

El conjunto solución de $-6x^3 + 7x^2 - 1 = 0$ es $\left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{-1}{32}\right\}$ por (*) y (**)

2. $3x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 8x - 4 = 0$

Haciendo $P(x) = 3x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 8x - 4$

a) $D_{-4} = \{-1, 1, 2, -2, 4, -4\}$ (divisores enteros de -4)

b) $D_3 = \{3, 1\}$ (divisores naturales de 3)

c) $D = \left\{\dfrac{1}{3}, \dfrac{-1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{-2}{3}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{-4}{3}, 1, -1, 2, -2, 4, -4\right\}$ (Posibles soluciones de $P(x) = 0$)

d) Calculemos $P\left(\dfrac{-1}{3}\right)$

$$\begin{array}{rrrrr|c} 3 & -8 & 9 & -8 & -4 & \frac{-1}{3} \\ & -1 & 3 & -4 & 4 & \\ \hline \underbrace{3 \quad -9 \quad 12 \quad -12}_{3x^3-9x^2+12x-12} & & & & 0 & \end{array}$$

Como $P\left(\dfrac{-1}{3}\right) = 0$, entonces $\dfrac{-1}{3}$ es una solución de $P(x) = 0$, además se cumple que

$3x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 8x - 4 = \left(x + \dfrac{1}{3}\right)\left(3x^3 - 9x^2 + 12x - 12\right)$

e) Resolvamos $3x^3 - 9x^2 + 12x - 12 = 0$

Haciendo $Q(x) = 3x^3 - 9x^2 + 12x - 12$

Recuerde que los posibles ceros racionales de $Q(x)$, es decir las posibilidades soluciones racionales de $Q(x) = 0$ son elementos de D (ver apartado c)

i) Verifique que $D = \left\{\dfrac{1}{3}, \dfrac{-1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{-2}{3}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{-4}{3}, 1 \ \text{ y } \ -1\right\}$ no contiene ceros racionales de $Q(x)$

ii) Calculemos $Q(2)$

$$\begin{array}{rrrr|c} 3 & -9 & 12 & -12 & 2 \\ & 6 & -6 & 12 & \\ \hline \underbrace{3 \quad -3 \quad 6}_{3x^2-3x+6} & & & 0 & \end{array}$$

$3x^3 - 9x^2 + 12x - 12 = (x - 2)(3x^2 - 3x + 6)$

Como $Q(2) = 0$, entonces 2 es una solución de $Q(x) = 0$ y por lo tanto también es solución de $P(x) = 0$

iii) Resolvamos $3x^2 - 3x + 6 = 0$

$$\begin{aligned} \Delta &= (-3)^2 - 4(3)(6) \\ \Delta &= 9 - 72 \\ \Delta &= -63 \end{aligned}$$

Como $\Delta < 0$ entonces $3x^2 - 3x + 6 = 0$ no tiene soluciones reales, por lo tanto el conjunto solución de $3x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 8x - 4 = 0$ es $\left\{\dfrac{-1}{3}, 2\right\}$

Ejemplo 18

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $x^3 + 16x^2 - 7x + 10 = -x^3 + (4x+1)^2$

   Solución

   Nota: En la resolución de este ejemplo omitiremos el cálculo de las divisiones, así como de los posibles ceros de los polinomios correspondientes.

$$\begin{array}{rrcl} & x^3 + 16x^2 - 7x + 10 & = & -x^3 + (4x+1)^2 \\ \Longrightarrow & x^3 + 16x^2 - 7x + 10 & = & -x^3 + 16x^2 + 8x + 1 \\ \Longrightarrow & 2x^3 - 15x + 9 & = & 0 \end{array}$$

   Haciendo $P(x) = 2x^3 - 15x + 9$

   a) Calculemos $P(-3)$

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -15 & 9 & -3 \\ & -6 & 18 & -9 & \\ \hline \underbrace{2 \quad -6 \quad 3}_{2x^2-6x+3} & & & 0 & \end{array}$$

   $2x^3 - 15x + 9 = (x+3)(2x^2 - 6x + 3)$

   Como $P(-3) = 0$, entonces -3 es una solución de $P(x) = 0$ (*)

   b) Resolvamos ahora $2x^2 - 6x + 3 = 0$

$$\begin{array}{rcl} \Delta & = & (-6)^2 - 4(2)(3) \\ \Delta & = & 36 - 24 = 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcrcl} \alpha & = & \dfrac{-(-6) - \sqrt{12}}{2(2)} & \text{y} & \beta & = & \dfrac{-(-6) + \sqrt{12}}{2(2)} \\ \alpha & = & \dfrac{6 - \sqrt{12}}{4} & \text{y} & \beta & = & \dfrac{6 + \sqrt{12}}{4} \\ \alpha & = & \dfrac{6 - \sqrt{4 \cdot 3}}{4} & \text{y} & \beta & = & \dfrac{6 + \sqrt{4 \cdot 3}}{4} \\ \alpha & = & \dfrac{6 - 2\sqrt{3}}{4} & \text{y} & \beta & = & \dfrac{6 + 2\sqrt{3}}{4} \\ \alpha & = & \dfrac{3 - \sqrt{3}}{2} & \text{y} & \beta & = & \dfrac{3 + \sqrt{3}}{2} \quad (**) \end{array}$$

   Por (*) y (**) el conjunto solución de $2x^3 - 15x^2 + 9 = 0$ y por lo tanto también el de

   $x^3 + 16x^2 - 7x + 10 = -x^3 + (4x+1)^2$ es $\left\{-3, \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}\right\}$

2. $x^4 + 5x^3 - 4x^2 - 20x = 0$

Solución

$$\begin{aligned} x^4+5x^3-4x^2-20x &= 0 \\ x(x^3+5x^2-4x-20) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces

$x=0$ ó $x^3+5x^2-4x-20=0$

Por lo que 0 es una solución de $x^4+5x^3-4x^2-20x=0$

a) Resolvamos $x^3+5x^2-4x-20=0$

Sea $P(x)=x^3+5x^2-4x-20$

i) Calculemos $P(-5)$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -4 & -20 & -5 \\ & -5 & 0 & 20 & \\ \hline \underbrace{1 \quad 0 \quad -4}_{x^2-4} & & & 0 & \end{array}$$

$x^3+5x^2-4x-20=(x+5)(x^2-4)$

Como $P(-5)=0$ entonces -5 es una solución de $P(x)=0$ y por lo tanto una solución de $x^4+5x^3-4x^2-20x=0$ (**)

ii) Resolvamos $x^2-4=0$

$$\begin{aligned} x^2-4 &= 0 \\ (x-2)(x+2) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{array}{rclcrcl} x-2 &=& 0 & \text{ó} & x+2 &=& 0 \\ x &=& 2 & \text{ó} & x &=& -2 \qquad (***) \end{array}$$

Por (*), (**) y (***) el conjunto solución de $x^4+5x^3-4x^2-10x=0$ es $\{0,-5,2,-2\}$

Ejercicios 8

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $x^3+12x^2+36x=0$

b) $-5x^3+2x+3=0$

c) $-x^4+7x^2+6x=0$

d) $3x^3-x^2+15x-5=0$

e) $x^4+x^3=x^3-5x+6$

f) $2x^5-8x^4-3x+12=0$

g) $x^5-2x^4-10x^3+20x^2+9x-18=0$

h) $x^4-15x^2-10x+24=0$

i) $x^4+22x^2-75=0$

Recordemos que en la definición 5, se definió el conjunto solución de una ecuación, como aquel conjunto que está contenido en el dominio de la incógnita y que consta de los números reales que al ser sustituidos en la ecuación, da como resultado una identidad numérica.

En los ejemplos anteriores no determinamos explícitamente el dominio de la incógnita, debido a que en estos casos el dominio de la incógnita era el conjunto de los números reales. En esta sección nos interesa estudiar ecuaciones de las cuales el dominio de la incógnita puede ser un subconjunto propio de $\mathbb{R}$.

Pero, antes de empezar el estudio de este tipo de ecuaciones, es necesario tener presente las dos reglas siguientes.

Regla 1

Si en el proceso de la resolución de una ecuación se obtiene una igualdad verdadera, entonces el conjunto solución de la ecuación original es el dominio de la incógnita.

Regla 2

Si en el proceso de la resolución de una ecuación se obtiene una igualdad falsa, entonces el conjunto solución de la ecuación original es el conjunto vacío.

Ejemplo 19

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $x-2-\dfrac{(x-2)(x-1)}{x-1}=0$

   Solución

   El dominio de la incógnita es $\mathbb{R}-\{1\}$

$$\begin{aligned} x-2-\frac{(x-2)(x-1)}{x-1} &= 0 \\ x-2-(x-2) &= 0 \\ x-2-x+2 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

   Como el resultado es una igualdad verdadera y $x \neq 1,$ entonces el conjunto solución es el dominio de la incógnita es decir $\mathbb{R}-\{1\}$ (ver Regla 1)

2. $x+1=x$

   Solución

   El dominio de la incógnita es $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x+1 &= x \\ x+1-x &= 0 \\ 1 &= 0 \end{aligned}$$

Como el resultado es una igualdad falsa entonces el conjunto solución es $\varnothing$ (ver Regla 2)

3. $3(x-2)+4(5-x)=-x+14$

Solución

El dominio de la incógnita es $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 3(x-2)+4(5-x) &= -x+14 \\ 3x-6+20-4x &= -x+14 \\ -x+14 &= -x+14 \\ -x+14+x-14 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Como el resultado es una igualdad verdadera, entonces el conjunto solución es el dominio de la incógnita, es decir $\mathbb{R}$ (ver Regla 1)

3.5 Ecuaciones que involucran fracciones racionales

Recordemos que una fracción racional es una expresión de la forma $\dfrac{A(x)}{B(x)}$, con $A(x)$ y $B(x)$ polinomios y $B(x) \neq 0$.

Para resolver ecuaciones que involucran fracciones racionales haremos uso de los procedimientos utilizados en el Capítulo III y subsiguientes, así como de las siguientes propiedades:

Propiedad 2

Sea $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$ tal que $b \neq 0$. Entonces se cumple:

1. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{b} \implies a = c$

2. $\dfrac{a}{b} = 0 \implies a = 0$

■ **Ejemplo 20**

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $\dfrac{3}{2x+6}=\dfrac{1}{x+3}$

   Solución

   En este caso debe cumplirse:

   $2x+6\neq 0$ y $x+3\neq 0$ es decir $x\neq -3$

   Por lo que el dominio de la incógnita es $\mathbb{R}-\{-3\}$

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{2x+6} &= \frac{1}{x+3} \\
\frac{3}{2(x+3)} &= \frac{1}{x+3} \\
\frac{3}{2(x+3)} &= \frac{1}{x+3}\cdot\frac{2}{2} \\
\frac{3}{2(x+3)} &= \frac{2}{2(x+3)} \qquad \text{Aplicando la propiedad 2, apartado 1.} \\
3 &= 2
\end{aligned}
$$

   Como obtuvimos una igualdad falsa, entonces la ecuación original no tiene solución, es decir su conjunto solución es $\varnothing$ (ver Regla 2)

2. $\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2x-1}=\dfrac{4x-1}{2x(2x-1)}$

   Solución

   En este caso debe cumplirse que:

   $2x\neq 0$ y $2x-1\neq 0$ es decir $x\neq 0$ y $x\neq \dfrac{1}{2}$

   Por lo que el dominio de la incógnita es $\mathbb{R}-\left\{0,\dfrac{1}{2}\right\}$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2x} + \frac{1}{2x-1} &= \frac{4x-1}{2x(2x-1)} \\
\frac{1}{2x} \cdot \frac{2x-1}{2x-1} + \frac{1}{2x-1} \cdot \frac{2x}{2x} &= \frac{4x-1}{2x(2x-1)} \\
\frac{2x-1+2x}{2x(2x-1)} &= \frac{4x-1}{2x(2x-1)} \qquad \text{Aplicando la propiedad 2, apartado 1.} \\
2x-1+2x &= 4x-1 \\
4x-1 &= 4x-1 \\
4x-1-4x+1 &= 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}
$$

Como el resultado es una igualdad verdadera y el dominio de la incógnita incógnita es $\mathbb{R} - \left\{0, \dfrac{1}{2}\right\}$ tenemos que el conjunto solución de la ecuación es $\mathbb{R} - \left\{0, \dfrac{1}{2}\right\}$ (ver Regla 1).

3. $\dfrac{2x^2 - 7x + 16}{(x-2)(x+3)} - \dfrac{2}{x-2} - \dfrac{x}{x+3} = 0$

Solución

En este caso debe cumplirse que:

$x - 2 \neq 0$ y $x + 3 \neq 0$, es decir que $x \neq 2$ y $x \neq -3$. Por lo que el dominio de la incógnita es $\mathbb{R} - \{2, -3\}$ (*)

$$\begin{aligned}
\frac{2x^2-7x+16}{(x-2)(x+3)} - \frac{2}{x-2} - \frac{x}{x+3} &= 0 \\
\frac{2x^2-7x+16}{(x-2)(x+3)} - \frac{2}{x-2}\cdot\frac{x+3}{x+3} - \frac{x}{x+3}\cdot\frac{x-2}{x-2} &= 0 \\
\frac{2x^2-7x+16}{(x-2)(x+3)} - \frac{2(x+3)}{(x-2)(x+3)} - \frac{x(x-2)}{(x+3)(x-2)} &= 0 \\
\frac{2x^2-7x+16-2(x+3)-x(x-2)}{(x-2)(x+3)} &= 0 \qquad \text{Aplicando la propiedad 2, apartado 1.} \\
2x^2-7x+16-2(x+3)-x(x-2) &= 0 \\
2x^2-7x+16-2x-6-x^2+2x &= 0 \\
x^2-7x+10 &= 0 \\
\Delta &= (-7)^2-4(1)(10) \\
\Delta &= 49-40 \\
\Delta &= 9
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lllllll}
\alpha & = & \dfrac{-(-7)-\sqrt{9}}{2(1)} & \text{y} & \beta & = & \dfrac{-(-7)+\sqrt{9}}{2(1)} \\
\alpha & = & \dfrac{7-3}{2} & \text{y} & \beta & = & \dfrac{7+3}{2} \\
\alpha & = & \dfrac{4}{2} & \text{y} & \beta & = & \dfrac{10}{2} \\
\alpha & = & 2 & \text{y} & \beta & = & 5
\end{array}$$

Pero, como 2 <u>no</u> es un elemento del dominio de la incógnita (ver(*)), 2 no puede ser solución de ecuación original, por lo tanto el conjunto solución es $\{5\}$.

4. $\dfrac{2}{x+1} + \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{x+3}{x^2-1} = \dfrac{6}{x-1}$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-1}+\frac{x+3}{x^2-1} &= \frac{6}{x-1} \\
\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-1}+\frac{x+3}{(x-1)(x+1)} &= \frac{6}{x-1}
\end{aligned}$$

En este caso tiene que cumplirse que:

$x+1 \neq 0$ y $x-1 \neq 0$, es decir que $x \neq -1$ y $x \neq 1$.

Por lo que el dominio de la incógnita es $\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

$$\begin{aligned}
\frac{2}{x+1}\cdot\frac{x-1}{x-1}+\frac{3}{x-1}\cdot\frac{x+1}{x+1}+\frac{x+3}{(x-1)(x+1)} &= \frac{6}{x-1}\cdot\frac{x+1}{x+1} \\
\frac{2(x-1)}{(x+1)(x-1)}+\frac{3(x+1)}{(x-1)(x+1)}+\frac{x+3}{(x-1)(x+1)} &= \frac{6(x+1)}{(x-1)(x+1)} \quad \text{Aplicando la propiedad 2, apartado 1.} \\
\frac{2(x-1)+3(x+1)+x+3}{(x-1)(x+1)} &= \frac{6(x+1)}{(x-1)(x+1)} \\
2x-2+3x+3+x+3 &= 6x+6 \\
6x+4 &= 6x+6 \\
6x+4-6x-6 &= 0 \\
-2 &= 0
\end{aligned}$$

Como obtuvimos una igualdad falsa, entonces la ecuación original no tiene solución, es decir el conjunto solución es $\varnothing$.

■ Ejemplo 21

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x^2+x-2}+\dfrac{x+1}{x^3+4x^2+x-6}-\dfrac{x+5}{x^2+2x-3}=0$

   Solución

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2+x-2}+\frac{x+1}{x^3+4x^2+x-6}-\frac{x+5}{x^2+2x-3} &= 0 \\
\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x+2)(x-1)}+\frac{x+1}{(x-1)(x+3)(x+2)}-\frac{x+5}{(x+3)(x-1)} &= 0 \qquad (*)
\end{aligned}$$

(*) Los denominadores de las fracciones racionales correspondientes han sido factorizados usando los métodos de factorización por fórmula general y por división sintética.

En este caso debe cumplirse que:

$x+2 \neq 0, x+3 \neq 0$ y $x-1 \neq 0$, es decir que $x \neq -2, x \neq -3$ y $x \neq 1$

Por lo que el dominio de la incógnita es $\mathbb{R} - \{1, -2, -3\}$.

$$\frac{1}{x-1} \cdot \frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+2)(x-1)} \cdot \frac{x+3}{x+3} + \frac{x+1}{(x-1)(x+3)(x+2)} - \frac{x+5}{(x+3)(x-1)} \cdot \frac{x+2}{x+2} = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{(x+2)(x+3)}{(x-1)(x+2)(x+3)} + \frac{(x+3)}{(x+2)(x+3)(x-1)} + \frac{x+1}{(x+2)(x+3)(x-1)} - \frac{(x+5)(x+2)}{(x+3)(x-1)(x+5)} &= 0 \\
\frac{(x+2)(x+3) + (x+3) + (x+1) - (x+5)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x+3)} &= 0 \\
x^2 + 3x + 2x + 6 + x + 3 + x + 1 - (x^2 + 2x + 5x + 10) &= 0 \\
x^2 + 3x + 2x + 6 + x + 3 + x + 1 - x^2 - 2x - 5x - 10 &= 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

Como obtuvimos una igualdad verdadera, entonces la ecuación original tiene como conjunto solución el dominio de la incógnita, es decir $\mathbb{R} - \{1, -2, -3\}$.

2. $\dfrac{2}{x^2-x-6} + \dfrac{3}{x^2+x-2} = \dfrac{-x^2+7x-8}{x^3-2x^2-5x+6}$

Solución

$$\frac{2}{(x-3)(x+2)} + \frac{3}{(x+2)(x-1)} = \frac{-x^2+7x-8}{(x-1)(x-3)(x+2)}$$

En este caso debe cumplirse que:

$x-3 \neq 0,\ x+2 \neq 0,$ y $x-1 \neq 0$ es decir $x \neq 3,\ x \neq -2$ y $x \neq 1$

Por lo que el dominio de la incógnita es $\mathbb{R} - \{3, -2, 1\}$

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{(x-3)(x+2)}\cdot\frac{x-1}{x-1}+\frac{3}{(x+2)(x-1)}\cdot\frac{x-3}{x-3} &= \frac{-x^2+7x-8}{(x-1)(x-3)(x+2)}\\
\frac{2(x-1)}{(x-1)(x+2)(x-3)}+\frac{3(x-3)}{(x-1)(x+2)(x-3)} &= \frac{-x^2+7x-8}{(x-1)(x-3)(x+2)}\\
\frac{2(x-1)+3(x-3)}{(x-1)(x+2)(x-3)} &= \frac{-x^2+7x-8}{(x-1)(x-3)(x+2)}
\end{aligned}
$$

Aplicando la propiedad 2, apartado 1.

$$
\begin{aligned}
2(x-1)+3(x-3) &= -x^2+7x-8\\
2x-2+3x-9 &= -x^2+7x-8\\
x^2-7x+8+2x-2+3x-9 &= 0\\
x^2-2x-3 &= 0\\
\Delta &= (-2)^2-4(1)(-3)\\
\Delta &= 4+12\\
\Delta &= 16
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{-(-2)-\sqrt{16}}{2(1)} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{-(-2)+\sqrt{16}}{2(1)}\\
\alpha &= \frac{2-4}{2} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{2+4}{2}\\
\alpha &= \frac{-2}{2} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{6}{2}\\
\alpha &= -1 \quad \text{y} \quad \beta = 3
\end{aligned}
$$

Pero, como 3 no es un elemento del dominio de la incógnita, 3 no puede ser solución de la ecuación original, por lo tanto el conjunto solución es $\{-1\}$

3. $\dfrac{x-\dfrac{x-1}{x+1}}{x-1}-\dfrac{x+\dfrac{x+1}{x-1}}{x+1}-1=0$

Solución

$$\frac{x-\dfrac{x-1}{x+1}}{x-1}-\frac{x+\dfrac{x+1}{x-1}}{x+1}-1=0$$

En este caso debe cumplirse que:

$x+1\neq 0$, y $x-1\neq 0$, es decir $x\neq -1$, y $x\neq 1$

Por lo que el dominio de la incógnita es $\mathbb{R}-\{1,-1\}$

$$\begin{aligned}
\frac{\dfrac{x(x+1)-(x-1)}{x+1}}{x-1}-\frac{\dfrac{x(x-1)+(x+1)}{x-1}}{x+1}-1 &= 0\\
\frac{\dfrac{x^2+x-x+1}{x+1}}{x-1}-\frac{\dfrac{x^2-x+x+1}{x-1}}{x+1}-1 &= 0\\
\frac{\dfrac{x^2+1}{x+1}}{x-1}-\frac{\dfrac{x^2+1}{x-1}}{x+1}-1 &= 0\\
\frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)}-\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}-1 &= 0\\
\frac{x^2+1-(x^2+1)}{(x+1)(x-1)}-1 &= 0\\
\frac{x^2+1-x^2-1}{(x+1)(x-1)}-1 &= 0\\
\frac{0}{(x+1)(x-1)}-1 &= 0\\
0-1 &= 0\\
-1 &= 0
\end{aligned}$$

Como obtuvimos una igualdad falsa, entonces la ecuación original no tiene solución, es decir el conjunto solución es $\varnothing$

4. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{x^2}{x^2+2x+1}-\dfrac{x^2}{x^3+3x^2+3x+1}=1$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x+1}+\frac{x^2}{x^2+2x+1}-\frac{x^2}{x^3+3x^2+3x+1} &= 1\\
\frac{1}{x+1}+\frac{x^2}{(x+1)^2}-\frac{x^2}{(x+1)^3} &= 1 \qquad (*)
\end{aligned}$$

En este caso debe cumplirse que:

$x+1\neq 0,\quad$ es decir $\;x\neq -1.$

Por lo que el dominio de la incógnita es $\mathbb{R}-\{-1\}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x+1}\cdot\frac{(x+1)^2}{(x+1)^2}+\frac{x^2}{(x+1)^2}\cdot\frac{x+1}{x+1}-\frac{x^2}{(x+1)^3} &= 1\cdot\frac{(x+1)^3}{(x+1)^3}\\
\frac{(x+1)^2}{(x+1)^3}+\frac{x^2(x+1)}{(x+1)^3}-\frac{x^2}{(x+1)^3} &= \frac{(x+1)^3}{(x+1)^3}\\
\frac{(x+1)^2+x^2(x+1)-x^2}{(x+1)^3} &= \frac{(x+1)^3}{(x+1)^3}\\
(x+1)^2+x^2(x+1)-x^2 &= (x+1)^3\\
x^2+2x+1+x^3+x^2-x^2 &= x^3+3x^2+3x+1\\
x^2+2x+1+x^3+x^2-x^2-x^3-3x^2-3x-1 &= 0\\
-2x^2-x &= 0\\
-x(2x+1) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-x &= 0 \quad \text{ó} \quad 2x+1 = 0\\
x &= 0 \quad \text{ó} \quad\quad x = \frac{-1}{2}
\end{aligned}$$

Como 0 y $\dfrac{-1}{2}$ pertenecen al dominio de la incógnita, entonces el conjunto solución de la ecuación original es $\left\{0,\dfrac{-1}{2}\right\}$.

Ejercicios 9

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $\dfrac{2}{x-5}+\dfrac{3x}{x^2-25}=\dfrac{5x+10}{x^2-25}$
2. $\dfrac{2x-3}{x-1}=\dfrac{2x+4}{2x+1}-\dfrac{1}{x-1}$

3. $\dfrac{4}{3x-3}+\dfrac{1}{2x-2}=\dfrac{1}{2x+2}+\dfrac{1}{x^2-1}$

4. $2x-12+\dfrac{48x+142}{x^2+7x+12}=\dfrac{x}{x+4}-\dfrac{2}{x+3}$

5. $\dfrac{3x-1}{x^2+7x+12}-\dfrac{1}{2x+6}=\dfrac{7}{6x+24}+\dfrac{x^2+14x-31}{6x^2+42x+72}$

6. $x+\dfrac{4x}{12}=\dfrac{-36}{x^2-3x}$

7. $\dfrac{x+2}{2x+6}-\dfrac{3x-2}{6x+18}+\dfrac{x}{x^2-9}=\dfrac{-2}{3x-9}$

8. $\dfrac{(x+3)^2}{(x-3)^2}=\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{2(7x+1)}{x^2-2x-3}$

9. $\dfrac{3}{x^2+4}+\dfrac{2}{(x+2)^2}=\dfrac{5x^2+12x+20}{(x+2)^2(x^2+4)}$

10. $\dfrac{x-1}{3x-3}-\dfrac{x-2}{6x-6}+\dfrac{x^2+2x-6}{9x^2-9}$

11. $\dfrac{x-x^2}{\dfrac{x}{x+1}-x}=x^2-1$

12. $\dfrac{x}{x^2-5x+4}+\dfrac{2}{x^2-3x-4}=\dfrac{x^3+3x^2+x-3}{x^3-4x^2-x+4}$

13. $\dfrac{1+\dfrac{x}{x-1}}{1-\dfrac{x}{x-1}}=-2x+1$

3.6 Ecuación Radical

■ Definición 10

Se llama ecuación radical a aquella ecuación que involucra al menos, un radical cuyo subradical es una expresión algebraica no constante.

■ Ejemplo 22

Son ecuaciones radicales:

a) $\sqrt[3]{2x+1}=3$

b) $\sqrt[4]{y^3-2x}=x+5$

c) $\dfrac{x}{\sqrt{x}+6}=x^2-7x$

d) $\sqrt[5]{\dfrac{-x+2}{x+1}}+\sqrt[4]{y}=3$

e) $\sqrt{x+6}-2x=\sqrt{x}$

Nota: Las ecuaciones radicales que estudiaremos en este texto involucrarán solamente una incógnita.
Para resolver ecuaciones radicales usaremos el siguiente resultado.

Resultado 2

Sean $P(x)$, $Q(x)$ dos expresiones algebraicas en una variable x y sea α un número real.
Si α es una solución de la ecuación $P(x) = Q(x)$, entonces α es una solución de la ecuación $[P(x)]^n = [Q(x)]^n$, donde $n \in \mathbb{N}$.

Otra forma de enunciar el resultado anterior es el siguiente:

El conjunto de solución de $P(x) = Q(x)$, está contenido en el conjunto de solución de $[P(x)]^n = [Q(x)]^n$, donde $n \in \mathbb{N}$.

El resultado anterior es una consecuencia de la siguiente propiedad de los números reales:

Propiedad

Sean $a \in \mathbb{R}\,,\ b \in \mathbb{R}\,, n \in \mathbb{N}, \quad a = b \implies a^n = b^n$

Consideremos el siguiente ejemplo, en el cual se ilustra el resultado anterior.

■ **Ejemplo 23**

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $2x + 1 = x + 3$

   Solución

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= x + 3 \\ 2x + 1 - x - 3 &= 0 \\ x - 2 &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

   El conjunto solución de $2x + 1 = x + 3$ es $\{2\}$

2. $(2x + 1)^2 = (x + 3)^2$

   Solución

$$\begin{aligned} 4x^2+4x+1 &= x^2+6x+9 \\ 4x^2+4x+1-x^2-6x-9 &= 0 \\ 3x^2-2x-8 &= 0 \\ \Delta &= (-2)^2-4(3)(-8) \\ \Delta &= 100 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lcl} \alpha = \dfrac{-(-2)-\sqrt{100}}{2(3)} & \text{y} & \beta = \dfrac{-(-2)+\sqrt{100}}{2(3)} \\ \alpha = \dfrac{2-10}{6} & \text{y} & \beta = \dfrac{2+10}{6} \\ \alpha = \dfrac{-4}{3} & \text{y} & \beta = 2 \end{array}$$

El conjunto solución de $(2x+1)^2=(x+3)^2$ es $\left\{2\,,\,\dfrac{-4}{3}\right\}$

En el caso anterior podemos observar que 2 es una solución de la ecuación $2x+1=x+3$ y también es una solución de la ecuación $(2x+1)^2=(x+3)^2$. Sin embargo, observemos que $\dfrac{-4}{3}$ es una solución de la ecuación $(2x+1)^2=(x+3)^2$, pero no es solución de $2x+1=x+3$, esto quiere decir que $\{2\}\subset\left\{2\,,\,\dfrac{-4}{3}\right\}$.

Observación

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos expresiones algebraicas en una variable, $\alpha\in\mathbb{R}$ *y* $n\in\mathbb{N}$. Si α es una solución de la ecuación $[P(x)]^n=[Q(x)]^n$, entonces α no necesariamente es solución de la ecuación $P(x)=Q(x)$.

Por ejemplo en el caso anterior $\dfrac{-4}{3}$ es solución de $(2x+2)^2=(x+3)^2$, pero no es solución de $2x+1=x+3$.

Convenio

Sea $[P(x)]^n=[Q(x)]^n$ una ecuación con variable x, y sea α un número real tal que α es una solución de $[P(x)]^n=[Q(x)]^n$, α es una solución de la ecuación $P(x)=Q(x)$ si y sólo si, al sustituir x por α en $P(x)=Q(x)$, se obtiene una igualdad verdadera.

Ejemplo 24

Resuelva cada una de las ecuaciones racionales:

a) $\sqrt{8-x^2}=x$ b) $\sqrt[3]{12x+8}=x+2$ c) $\sqrt[4]{x^4-2x-1}=x$

Solución

1. $\sqrt{8-x^2}=x$

$$\begin{aligned}(\sqrt{8-x^2})^2 &= x^2\\ 8-x^2 &= x^2\\ 8-2x^2 &= 0\\ 2(4-x^2) &= 0\\ 2(2-x)(2+x) &= 0\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{array}{rclcrcl} 2-x &=& 0 & \text{ó} & 2+x &=& 0\\ -x &=& -2 & \text{ó} & x &=& -2\\ x &=& 2 & \text{ó} & x &=& -2\end{array}$$

Por lo que $x=2$ y $x=-2$ son las posibles soluciones.

Determinemos si 2 y -2 son solución de la ecuación $\sqrt{8-x^2}=x$

$$\begin{aligned}x &= 2\\ \sqrt{8-(2)^2} &= 2\\ \sqrt{8-4} &= 2\\ \sqrt{4} &= 2\\ 2 &= 2\end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned}x &= -2\\ \sqrt{8-(-2)^2} &= -2\\ \sqrt{8-4} &= -2\\ \sqrt{4} &= -2\\ 2 &= -2\end{aligned}$$

¡Cierto! ¡Falso!

Como con $x=2$ se obtiene una igualdad verdadera y con $x=-2$ no, entonces 2 es solución y -2 no lo es.

Por lo anterior se concluye que $\{2\}$ es el conjunto solución de $\sqrt{8-x^2}=x$

Se obtuvo como consecuencia de que $a=b \implies a^n=b^n$, donde $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$, y $n\in\mathbb{N}$.

Además el valor de n se escogió convenientemente igual al índice del radical (es decir $n=2$).

2. $\sqrt[3]{12x+8}=x+2$

Solución

$$\begin{aligned}(\sqrt[3]{12x+8})^3 &= (x+2)^3\\ 12x+8 &= (x+2)(x+2)(x+2)\\ 12x+8 &= (x^2+4x+4)(x+2)\\ 12x+8 &= x^3+6x^2+12x+8\\ 0 &= x^3+6x^2+12x+8-12x-8\\ 0 &= x^3+6x^2\\ 0 &= x^2(x+6)\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{array}{rclcrcl} 0 & = & x^2 & \text{ó} & 0 & = & x+6 \\ 0 & = & x & \text{ó} & -6 & = & x \\ x & = & 0 & \text{ó} & x & = & -6 \end{array}$$

Por lo que $x = 0$ y $x = -6$ son las posibles soluciones.

Determinemos si 0 y -6 son solución de la ecuación $\sqrt[3]{12x+8} = x+2$

$$\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ \sqrt[3]{12(0)+8} & = & 0{+}2 \\ \sqrt[3]{0+8} & = & 2 \\ \sqrt[3]{8} & = & 2 \\ \sqrt[3]{2^3} & = & 2 \\ 2 & = & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x & = & -6 \\ \sqrt[3]{12(-6)+8} & = & -6+2 \\ \sqrt[3]{-72+8} & = & -4 \\ \sqrt[3]{-64} & = & -4 \\ \sqrt[3]{(-4)^3} & = & -4 \\ -4 & = & -4 \end{array}$$

¡Cierto! ¡Cierto!

Como al sustituir $x = 0$ ó $x = -6$ en $\sqrt[3]{12x+8} = x+2$ obtenemos igualdades verdaderas, entonces 0 y -6 son soluciones de dicha ecuación.

Por lo anterior se concluye que $\{0, -6\}$ es el conjunto solución de $\sqrt[3]{12x+8} = x+2$

3. $\sqrt[4]{x^4 - 2x - 1} = x$

$$\begin{array}{rcl} (\sqrt[4]{x^4-2x-1})^4 & = & x^4 \\ x^4 - 2x - 1 & = & x^4 \\ x^4 - 2x - 1 - x^4 & = & 0 \\ -2x - 1 & = & 0 \\ -2x & = & 1 \\ x & = & \dfrac{-1}{2} \end{array}$$

Por lo que $x = -\dfrac{1}{2}$ es una posible solución.

Determinemos si $\dfrac{-1}{2}$ es solución de la ecuación $\sqrt[4]{x^4 - 2x - 1} = x$

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-1}{2} \\
\sqrt[4]{\left(\frac{-1}{2}\right)^4 - 2\left(\frac{-1}{2}\right) - 1} &= \frac{-1}{2} \\
\sqrt[4]{\frac{1}{16} + \frac{2}{2} - 1} &= \frac{-1}{2} \\
\sqrt[4]{\frac{1}{16}} &= \frac{-1}{2} \\
\frac{1}{2} &= \frac{-1}{2}
\end{aligned}$$

¡Falso!

es decir $\frac{-1}{2}$ no es solución de la ecuación.

Por lo anterior la ecuación $\sqrt[4]{x^4 - 2x - 1} = x$ no tiene solución, es decir, su conjunto solución es $\varnothing$.

Nota: Observe que en los ejemplos anteriores, en el proceso de resolución de ecuaciones radicales, con el fin de obtener una ecuación polinomial (la cual se puede resolver usando los conceptos estudiados anteriormente), se utilizó el resultado:

$$a = b \implies a^n = b^n \quad \text{donde } a \in \mathbb{R}\ , b \in \mathbb{R}\ , n \in \mathbb{N}$$

Ejercicios 10

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $x - 3 = \sqrt{x - 1}$
2. $10\sqrt{x} = x + 9$
3. $-\sqrt{x - 1} = x$
4. $\sqrt{5x - 1} = 5 - x$
5. $-\sqrt{2x - 5} = 4 - x$
6. $\sqrt[3]{7 - 2x^2} = -3$

Antes de analizar otro tipo de ecuaciones radicales, veamos el siguiente caso:

$$\sqrt{x} + x = 3$$

Resolviendo la ecuación anterior, usando lo estudiado hasta ahora en ecuaciones radicales.

$$\begin{aligned}
\sqrt{x} + x &= 3 \\
(\sqrt{x} + x)^2 &= 3^2 \\
(\sqrt{x})^2 + 2x\sqrt{x} + x^2 &= 9 \\
x + 2x\sqrt{x} + x^2 &= 9
\end{aligned}$$

Observemos que en esta útima ecuación tenemos todavía radicales, es decir, no hemos obtenido una ecuación polinomial, como sucedía en los ejemplos anteriores.

Así, para resolver ecuaciones del tipo anterior, se recomienda seguir el procedimiento que se enuncia a continuación:

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios (o fracciones racionales) y $n \in \mathbb{N}$.

Para resolver ecuaciones del tipo:

$$\sqrt[n]{P(x)} + Q(x) = R(x)$$

se recomienda transformarlas a una ecuación del tipo:

$$\sqrt[n]{P(x)} = R(x) - Q(x)$$

A partir de la ecuación anterior se obtiene que:

$$\left[\sqrt[n]{P(x)}\right]^n = [R(x) - Q(x)]^n$$

La cual a su vez implica que:

$$P(x) = [R(x) - Q(x)]^n$$

que es una ecuación que se puede resolver por los métodos estudiados anteriormente.

■ **Ejemplo 25**

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $\sqrt{x+2} + 2x - 1 = 4x$

   Solución

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+2} &= 4x-2x+1\\
\sqrt{x+2} &= 2x+1\\
(\sqrt{x+2})^2 &= (2x+1)^2\\
x+2 &= 4x^2+4x+1\\
4x^2+4x+1 &= x+2\\
4x^2+4x+1-x-2 &= 0\\
4x^2+3x-1 &= 0\\
\Delta &= (3)^2-4(4)(-1)\\
\Delta &= 9+16\\
\Delta &= 25
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{-3-\sqrt{25}}{8} = -1\\
\beta &= \frac{-3+\sqrt{25}}{8} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Posibles soluciones: $x=-1$ ó $x=\dfrac{1}{4}$

Prueba:

$x=-1$

$$\begin{aligned}
\sqrt{-1+2}+2(-1)-1 &= 4(-1)\\
\sqrt{1}-2-1 &= -4\\
1-2-1 &= -4\\
-2 &= -4
\end{aligned}$$

¡Falso!

$x=\dfrac{1}{4}$

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{1}{4}+2}+2\left(\frac{1}{4}\right)-1 &= 4\left(\frac{1}{4}\right)\\
\sqrt{\frac{9}{4}}+\frac{1}{2}-1 &= 1\\
\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-1 &= 1\\
2-1 &= 1\\
1 &= 1
\end{aligned}$$

¡Cierto!

Por lo tanto sólo $\dfrac{1}{4}$ es solución de $\sqrt{x+2}+2x-1=4x$ y su conjunto solución es $\left\{\dfrac{1}{4}\right\}$.

2. $\sqrt[3]{\dfrac{x^3}{8}+x^2-16}+\dfrac{x}{2}-5=x-5$

Solución

$$
\begin{aligned}
\sqrt[3]{\frac{x^3}{8}+x^2-16} &= x-5-\frac{x}{2}+5\\
\sqrt[3]{\frac{x^3}{8}+x^2-16} &= \frac{x}{2}\\
\left(\sqrt[3]{\frac{x^3}{8}+x^2-16}\right)^3 &= \left(\frac{x}{2}\right)^3\\
\frac{x^3}{8}+x^2-16 &= \frac{x^3}{8}\\
\frac{x^3}{8}+x^2-16-\frac{x^3}{8} &= 0\\
x^2-16 &= 0\\
(x-4)(x+4) &= 0
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
\begin{array}{rclcrcl}
x-4 &=& 0 & \text{ó} & x+4 &=& 0\\
x &=& 4 & \text{ó} & x &=& -4
\end{array}
$$

Prueba:

$x=4$

$$
\begin{aligned}
\sqrt[3]{\frac{4^3}{8}+4^2-16}+\frac{4}{2}-5 &= 4-5\\
\sqrt[3]{\frac{64}{8}+16-16}+2-5 &= -1\\
\sqrt[3]{8}-3 &= -1\\
2-3 &= -1\\
-1 &= -1
\end{aligned}
$$

¡Cierto!

$x=-4$

$$
\begin{aligned}
\sqrt[3]{\frac{(-4)^3}{8}+(-4)^2-16}+\frac{(-4)}{2}-5 &= (-4)-5\\
\sqrt[3]{\frac{-64}{8}+16-16}+-2-5 &= -9\\
\sqrt[3]{-8}-7 &= -9\\
-2-7 &= -9\\
-9 &= -9
\end{aligned}
$$

¡Cierto!

Por tanto -4 *y* 4 son soluciones $\sqrt[3]{\frac{x^3}{8}+x^2-16}+\frac{x}{2}-5=x-5$ y su conjunto de solución es $\{-4\,,\,4\}$.

Ejercicios 11

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

a)	$x-3-\sqrt{x-1}=0$	c)	$\sqrt{x-12}-4=0$	e)	$\sqrt{6x-9}+x=0$
b)	$\sqrt{6x+25}-x=3$	d)	$\sqrt{4x+29}-x-2=0$	f)	$2\sqrt{2x+1}=3-x$

■ **Ejemplo 26**

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $\dfrac{\sqrt{x^4 - 7x^3 + 5x^2 - x + 6}}{x} + 3 = x$

   Solución

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{\sqrt{x^4 - 7x^3 + 5x^2 - x + 6}}{x} & = & x - 3 \\
\left(\dfrac{\sqrt{x^4 - 7x^3 + 5x^2 - x + 6}}{x}\right)^2 & = & (x-3)^2 \\
\dfrac{x^4 - 7x^3 + 5x^2 - x + 6}{x^2} & = & x^2 - 6x + 9 \\
x^4 - 7x^3 + 5x^2 - x + 6 & = & x^2(x^2 - 6x + 9) \\
x^4 - 7x^3 + 5x^2 - x + 6 & = & x^4 - 6x^3 + 9x^2 \\
x^4 - 7x^3 + 5x^2 - x + 6 - x^4 + 6x^3 - 9x^2 & = & 0 \\
-x^3 - 4x^2 - x + 6 & = & 0 \qquad (*)
\end{array}$$

   Resolviendo esta ecuación con división sintética tenemos que:

$$\begin{array}{rrrr|l}
-1 & -4 & -1 & 6 & 1 \\
 & -1 & -5 & -6 & \\
\hline
-1 & -5 & -6 & 0 &
\end{array}$$

   Por lo que 1 es solución de (*) y podemos expresarla como $(x-1)(-x^2 - 5x - 6) = 0$.

   Resolviendo $-x^2 - 5x - 6 = 0$

$$\begin{array}{lclclcl}
\alpha & = & \dfrac{5 - \sqrt{1}}{2(-1)} & \text{y} & \beta & = & \dfrac{5 + \sqrt{1}}{2(-1)} \\
\alpha & = & \dfrac{5 - 1}{-2} & \text{y} & \beta & = & \dfrac{5 + 1}{-2} \\
\alpha & = & \dfrac{4}{-2} & \text{y} & \beta & = & \dfrac{6}{-2} \\
\alpha & = & -2 & \text{y} & \beta & = & -3
\end{array}$$

   Prueba:

   - $x = 1$

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{\sqrt{1^4 - 7(1)^3 + 5(1)^2 - 1 + 6}}{1} + 3 & = & 1 \\
\sqrt{1 - 7 + 5 - 1 + 6} + 3 & = & 1 \\
\sqrt{4} + 3 & = & 1 \\
2 + 3 & = & 1 \\
5 & = & 1
\end{array}$$

¡Falso!

Por tanto 1 no es solución de la ecuación.

- $x = -2$

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{(-2)^4 - 7(-2)^3 + 5(-2)^2 - (-2) + 6}}{-2} + 3 &= -2 \\
\frac{\sqrt{16 + 56 + 20 + 2 + 6}}{-2} + 3 &= -2 \\
\frac{\sqrt{100}}{-2} + 3 &= -2 \\
\frac{10}{-2} + 3 &= -2 \\
-5 + 3 &= -2 \\
-2 &= -2
\end{aligned}$$

¡Cierto!

Por tanto -2 es solución de la ecuación.

- $x = -3$

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{(-3)^4 - 7(-3)^3 + 5(-3)^2 - (-3) + 6}}{-3} + 3 &= -3 \\
\frac{\sqrt{81 + 189 + 45 + 3 + 6}}{-3} + 3 &= -3 \\
\frac{\sqrt{324}}{-3} + 3 &= -3 \\
\frac{18}{-3} + 3 &= -3 \\
-6 + 3 &= -3 \\
-3 &= -3
\end{aligned}$$

¡Cierto!

Por tanto -3 es solución de la ecuación.

Por lo anterior tenemos que el conjunto solución de la ecuación $\dfrac{\sqrt{x^4 - 7x^3 + 5x^2 - x + 6}}{x} + 3 = x$ es $\{-2\ ,\ -3\}$.

2. $-2+3\sqrt{3-x}-x+1=0$

   Solución

$$\begin{array}{rcl} 3\sqrt{3-x} & = & x-1+2 \\ 3\sqrt{3-x} & = & x+1 \\ (3\sqrt{3-x}\,)^2 & = & (x+1)^2 \\ 9(3-x) & = & x^2+2x+1 \\ 27-9x & = & x^2+2x+1 \\ x^2+2x+1 & = & 27-9x \\ x^2+2x+1+9x-27 & = & 0 \\ x^2+11x-26 & = & 0 \\ \Delta & = & (11)^2-4(1)(-26) \\ \Delta & = & 121+104 \\ \Delta & = & 225 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & \dfrac{-11-\sqrt{225}}{2} \quad \text{y} \quad \beta = \dfrac{-11+\sqrt{225}}{2} \\ \alpha & = & \dfrac{-11-15}{2} \quad \text{y} \quad \beta = \dfrac{-11+15}{2} \\ \alpha & = & \dfrac{-26}{2} \quad \text{y} \quad \beta = \dfrac{4}{2} \\ \alpha & = & -13 \quad \text{y} \quad \beta = 2 \end{array}$$

Prueba:

- $x=-13$

$$\begin{array}{rcl} -2+3\sqrt{3-(-13)}-(-13)+1 & = & 0 \\ -2+3\sqrt{16}+13+1 & = & 0 \\ -2+3(4)+13+1 & = & 0 \\ -2+12+13+1 & = & 0 \\ 24 & = & 0 \end{array}$$

¡Falso!

Por tanto -13 no es solución de la ecuación.

- $x=2$

$$\begin{aligned} -2+3\sqrt{3-2}-2+1 &= 0 \\ -2+3\sqrt{1}-2+1 &= 0 \\ -2+3(1)-2+1 &= 0 \\ -2+3-2+1 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

¡Cierto!

Por tanto 2 es solución de la ecuación.

Por lo anterior tenemos que el conjunto solución de $-2+3\sqrt{3-x}-x+1=0$ es $\{2\}$.

Ejercicios 12

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $2\sqrt{x+\dfrac{5}{4}}+2x=-1$

2. $-x+\sqrt{-3x+16}+4=0$

3. $-x+2\sqrt{x+4}+4=0$

4. $\dfrac{-x+1}{\sqrt{-2x+2}}+x=0$

5. $x+2\sqrt{x-6}=5$

6. $x+4=-3\sqrt{2+x}$

En el ejemplo siguiente se ilustra el procedimiento a seguir en la resolución de ecuaciones radicales que involucren más de un radical no constante.

■ **Ejemplo 27**

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+4}=5$

   Solución

$$\begin{aligned}
\sqrt{x-1} &= 5-\sqrt{x+4} \\
(\sqrt{x-1})^2 &= (5-\sqrt{x+4})^2 \\
x-1 &= 25-10\sqrt{x+4}+x+4 \\
x-1-25-x-4 &= -10\sqrt{x+4} \\
-30 &= -10\sqrt{x+4} \\
\frac{-30}{-10} &= \sqrt{x+4} \\
3^2 &= (\sqrt{x+4}\,)^2 \\
9 &= x+4 \\
9-4 &= x \\
x &= 5
\end{aligned}$$

Prueba:

$x = 5$

$$\begin{aligned}
\sqrt{5-1}+\sqrt{5+4} &= 5 \\
\sqrt{4}+\sqrt{9} &= 5 \\
2+3 &= 5 \\
5 &= 5
\end{aligned}$$

¡Cierto!

Por lo que el conjunto de solución de $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+4}=5$ es $\{5\}$.

1. $2\sqrt[3]{x+1}=\sqrt[6]{-128x+65}$

Solución

$$\begin{aligned}
\left(2\sqrt[3]{x-1}\right)^6 &= \left(\sqrt[6]{-128x+65}\right)^6 \\
64\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^6 &= -128x+65 \\
64\left[(x-1)^{\frac{1}{3}}\right]^6 &= -128x+65 \\
64\,(x-1)^{\frac{6}{3}} &= -128x+65 \\
64\,(x-1)^2 &= -128x+65 \\
64\left(x^2-2x+1\right) &= -128x+65 \\
64x^2-128x+64+128x-65 &= 0 \\
64x^2-1 &= 0 \\
(8x-1)\,(8x+1) &= 0 \\
8x-1=0 \quad \text{ó} \quad 8x+1 &= 0
\end{aligned}$$

$$8x=1 \quad \text{ó} \quad 8x=-1$$

$$x=\frac{1}{8} \quad \text{ó} \quad x=\frac{-1}{8}$$

Por lo que las posible soluciones son $x=\dfrac{1}{8}$ y $x=\dfrac{-1}{8}$

Prueba

- $x=\dfrac{1}{8}$

$$\begin{aligned}
2\sqrt[3]{\frac{1}{8}-1} &= \sqrt[6]{-128\left(\frac{1}{8}\right)+65} \\
2\sqrt[3]{\frac{-7}{8}} &= \sqrt[6]{-16+65} \\
-2\cdot\frac{1}{2}\sqrt[3]{7} &= \sqrt[6]{49} \\
-\sqrt[3]{7} &= \sqrt[6]{7^2} \\
-\sqrt[3]{7} &= \sqrt[3]{7} \qquad \text{¡falso!}
\end{aligned}$$

- $x=\dfrac{-1}{8}$

$$\begin{aligned}
2\sqrt[3]{\frac{-1}{8}-1} &= \sqrt[6]{-128\cdot\frac{-1}{8}+65}\\
2\sqrt[3]{\frac{-9}{8}} &= \sqrt[6]{16+65}\\
2\cdot\frac{1}{2}\sqrt[3]{-9} &= \sqrt[6]{81}\\
-\sqrt[3]{9} &= \sqrt[6]{9^2}\\
-\sqrt[3]{9} &= \sqrt[3]{9} \qquad \text{¡falso!}
\end{aligned}$$

Por lo anterior la ecuación $2\sqrt[3]{x+1}=\sqrt[6]{-128x+65}$ no tiene solución es decir su conjunto solución es $\varnothing$

Ejercicios 13

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}=1$

b) $\sqrt[3]{x+1}=\sqrt[6]{3x+7}$

c) $\sqrt{3}\sqrt{x-1}=\sqrt{x-1}$

d) $\left(1+\sqrt{x}\right)^2+\left(1+\sqrt{x}\right)-6=0$

e) $\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}}-2=\dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}}$

f) $\sqrt{x+2}=\sqrt{x}+3$

3.7 Aplicación de las ecuaciones a la solución de problemas

¿Qué es un problema?

La palabra “problema” a menudo se emplea con un sentido equivocado en las clases de matemática. A menudo, determinado ejercicio es simple rutina para algunos individuos, mientras que para otros se convierte en tarea que requiere decisión y reflexión cuidadosa. Se ha dicho que: “Lo que para una persona es un problema para otra es un ejercicio y para una tercera un fracaso ”

Se considera que la existencia de ciertas condiciones determinan si una situación es un verdadero problema para determinado individuo, entre las cuales podemos mencionar:

i.) El camino para llegar a la meta deseada está bloqueado y los patrones fijos de conducta del individuo, sus respuestas habituales, no son sufientes para romper ese bloqueo.

ii.) Tiene que haber deliberación.